

Idealne kształty węzłów

Marta SZUMAŃSKA, Warszawa

Pojęcie węzła wydaje się intuicyjnie jasne, jednak węzły pojawiające się w matematyce nieco różnią się od tych, z którymi spotykamy się na co dzień. Istotnie – zazwyczaj mamy do czynienia z supłami o swobodnych końcach, które, przynajmniej w teorii, zawsze można rozplątać, a więc z punktu widzenia naszych, topologicznych w swej naturze rozważań, nie są interesującymi obiektami.

Węzły, którymi będziemy się zajmować w tym artykule, będą mieć zawsze związane końce; wówczas odpowiedź na pytanie, czy dany węzeł można rozsupłać bez rozcinania pętli, jest nieoczywista, zaś sprawdzenie, czy dwa zadane węzły są równoważne, to znaczy, czy można bez rozcinania przeprowadzić jeden z nich na drugi, jest bardzo często trudne. Metody powszechnie pojawiające się w artykułach dotyczących teorii węzłów mają charakter algebraiczny lub kombinatoryczny, często wskazuje się rozmaite operacje pozwalające uprościć węzeł nie zmieniając jego klasy oraz wielomiany niezmiennicze, dzięki którym można wykluczyć równoważność niektórych węzłów.

W bieżącym tekście spojrzymy na węzły okiem analityka. Pokażemy jak w rozpoznawaniu węzłów trywialnych mogą pomóc pewne funkcjonały oraz zastanowimy się jak przy pomocy takich funkcjonałów znaleźć w danej klasie węzeł zasługujący na miano idealnego. Zanim jednak do tego przystąpimy, konieczne jest uściślenie kilku pojęć.

W matematyce *węzeł* to krzywa zamknięta zanurzona w \mathbb{R}^3 , czyli taka krzywa w przestrzeni trójwymiarowej, która jest homeomorficzna z okręgiem. Dla uproszczenia sformułowań, przyjmijmy, że przez pojęcie węzła, rozumiemy będziemy zarówno jego parametryzację $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, jak i obraz okręgu w tej parametryzacji.

Aby opisać równoważność dwóch węzłów posłużymy się pojęciem izotopii – czyli bardziej restrykcyjnej homotopii. Homotopia jako taka nie może się tu przydać, gdyż każde dwa węzły są homotopijnie równoważne.

Definicja. Dwa homeomorfizmy na obraz $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ są *izotopijne* gdy istnieje homeomorfizm na obraz

$$F : X \times I \rightarrow Y \times I$$

taki, że $F(x, t) = (f(x, t), t)$ dla $x \in X, t \in I = [0, 1], f(x, 0) = f_0(x)$ oraz $f(x, 1) = f_1(x)$. Przekształcenie F nazywa się *izotopią zachowującą poziom*.

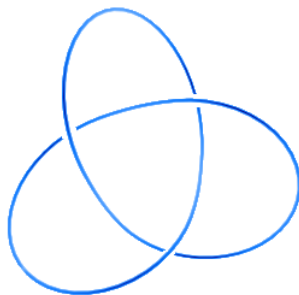
Izotopia to wciąż operacja pozostawiająca zbyt dużo swobody i wciąż dla naszych celów niewystarczająca. Można bowiem wskazać izotopię prowadzącą od trójlistnika do okręgu. Wystarczy wyobrazić sobie mały trójlistnik na krzywej o pomijalnej grubości i w sposób ciągle ów supełek zaciągać, tak że trójlistnik zostanie zdegenerowany do punktu, co oznacza, że w wyniku takiej operacji otrzymamy okrąg. Łatwo sprawdzić, że takie przekształcenie istotnie jest izotopią.

Potrzebujemy zatem czegoś odrobinę silniejszego, a konkretnie izotopii obejmującej węzły – czyli izotopii łączącej identyczność w \mathbb{R}^3 z takim homeomorfizmem \mathbb{R}^3 na obraz, który przekształca jeden węzeł na drugi. W porównaniu do izotopii powiększamy obszar obserwacji – nie tylko dbamy o to by w każdej chwili $\gamma_t(\cdot)$ była różnowartościowa, ale kontrolujemy również, co dzieje się z otoczeniem krzywej.

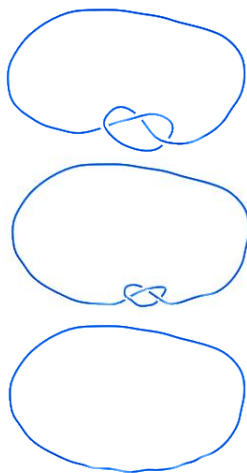
Definicja. Mówimy, że dwa węzły $\gamma_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ i $\gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ są *równoważne* lub, że *należą do tej samej klasy*, jeśli istnieje izotopia zachowująca poziom

$$H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \times [0, 1], \quad H(x, t) = (h(y, t), t),$$

taka, że $h(y, 0) = (y, 0)$ dla $y \in \mathbb{R}^3$ oraz $h(\gamma_1(x), 1) = (\gamma_2(x), 1)$ dla $x \in S^1$. Przekształcenie H nazywamy *izotopią obejmującą*.

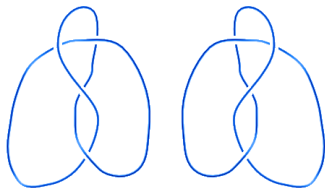


Trójlistnik



Izotopia może doprowadzić do zaciągnięcia składowego węzła, dlatego aby określić klasę węzła trzeba posłużyć się izotopią obejmującą.

Przykładem węzła chiralnego jest trójlistnik, węzłem achiralnym jest węzeł ósemkowy, przedstawiony na poniższym rysunku wraz ze swym odbiciem symetrycznym. Sprawdzenie, że te dwa węzły są równoważne, nie nastręcza dużych trudności.



Klasy abstrakcji relacji równoważności zadanej przez izotopię obejmowalną nazywamy klasami węzłów. W literaturze można spotkać również inną definicję równoważności węzłów. Mianowicie, przyjmuje się niekiedy, że dwa węzły są równoważne, jeśli istnieje homeomorfizm \mathbb{R}^3 przeprowadzający jeden z nich na drugi. Definicja ta nie jest równoważna, ze względu na istnienie węzłów chiralnych, czyli takich, które nie są izomorficzne ze swoim odbiciem lustrzanym. Od tej pory, jeśli nie zaznaczymy inaczej, mówiąc węzeł, będziemy mieć na myśli węzeł łagodny, czyli taki, który jest równoważny łamanej zwyczajnej zamkniętej.

Węzeł idealny – podejście pierwsze – długość liny.

W każdej klasie węzła chcielibyśmy umieć wskazać węzeł w pewnym sensie najprostszemu, który nie ma zbędnych przeplotów (zbędnych czyli takich, które bez rozcinania można zniwelować), jak najbardziej regularny. Pośród węzłów trywialnych niewątpliwie takim będzie okrąg, lecz czy można wskazać ideał w płataninie bardziej złożonych węzłów? Jedną z metod poszukiwania węzłów idealnych opiera się na następującym pomysśle – najprostszemu w danej klasie będzie taki węzeł, do którego zawiązania potrzebny będzie najkrótszy kawałek liny o zadanej grubości. Istotnie – im dłuższa lina, tym więcej zbędnych pętelek i przeplotów możemy wykonać. Oparta na tej idei definicja węzła idealnego pochodzi od A. Stasiaka i jego współpracowników:

Definicja. *Idealny węzeł* to taki, który minimalizuje długość liny (o ustalonej grubości) w swojej klasie izotopii.

Dla nas węzeł, to krzywa, zatem jednowymiarowy twór pozbawiony grubości, na pierwszy rzut oka definicja powyższa wydawać się więc może nieprzydatna. Jednak wykorzystując promień globalnej krzywizny Mengera możemy wskazać klasę „grubych” krzywych, czyli takich, które mogą być rdzeniem (linią centralną) liny o jakiejś mowa w powyższej definicji.

Promieniem krzywizny Mengera trójki punktów $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $x \neq y \neq z \neq x$, nazywamy promień okręgu przez nie przechodzącego i oznaczamy przez $R(x, y, z)$. Dla dowolnej krzywej prostowalnej, czyli takiej, która ma skończoną długość, definiujemy promień globalnej krzywizny Mengera:

$$\Delta(\gamma) = \inf\{R(\Gamma(x), \Gamma(y), \Gamma(z)) \mid x, y, z \in S_L, x \neq y \neq z \neq x\},$$

gdzie Γ oznacza parametryzację długością łuku. Gonzalez et al. w pracy [5] wykazali (m.in.), że parametryzacja krzywej spełniającej warunek $\Delta(\gamma) > \theta$ jest funkcją klasy C^1 , a jej pochodna jest lipschitzowska ze stałą θ , tzn.:

$$\|\Gamma'(x) - \Gamma'(y)\| \leq \theta|x - y|.$$

Krzywa, spełniająca warunek $\Delta(\gamma) > \theta$ może być postrzegana jako model linii centralnej liny o średnicy 2θ . Mówiąc bardzo skrótowo – warunek ten zapobiega zbyt szybkim zmianom kierunku krzywej, jak i temu by punkty leżące daleko od siebie na krzywej nie zbliżyły się w przestrzeni na odległość mniejszą niż 2θ .

Długość liny (ang. ropelength) definiuje się za pomocą formuły

$$L(\gamma) := \frac{\text{długość}(\gamma)}{2\Delta(\gamma)}.$$

W tym języku węzeł idealny to taki, dla którego wartość $L(\gamma)$ jest najmniejsza w danej klasie węzła.

Od czasu zdefiniowania węzłów idealnych wielu matematyków i fizyków zajmuje się ich poszukiwaniem. W klasie węzłów trywialnych wskazanie ideału nie nastręcza szczególnych problemów. Zgodnie z oczekiwaniami, $L(\gamma)$ jest minimalizowane przez okrąg, zaś najkrótsza możliwa pętla, którą można

Parametryzacja długością łuku to taka, która spełnia warunek $\Gamma([t_1, t_2]) = t_2 - t_1$. Jej pochodna Γ' istnieje prawie wszędzie, ponadto $\|\Gamma'\| = 1$ p.w.

stworzyć z liny o grubości 1 ma długość π . A jak krótka może być lina, by udało się z niej związać węzeł nietrywialny? Jedno z pierwszych pytań związanych z teorio-węzłowym pojęciem długości liny brzmiało tak:

Czy z liny długości jednej stopy, na jeden cal grubej można uzyskać węzeł nietrywialny?

Lina na 1 cal gruba, to lina o średnicy równej jednemu calowi, zatem dla γ będącej rdzeniem krzywej $\Delta(\gamma) = 0,5$ cala, ponadto 1 stopa = 12 cali, więc powyższe pytanie można zapisać w następujący sposób.

Czy istnieje krzywa zamknięta, nietrywialnie zawęzłona, dla której $L(\gamma) < 12$?

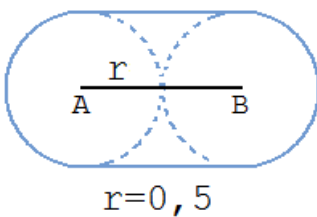
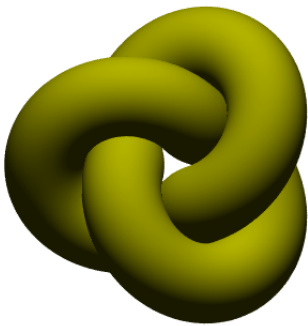
Mimo iż matematycy wskazywali kolejne dolne oszacowania długości liny dla nietrywialnych węzłów, a fizycy generowali z pomocą algorytmów numerycznych ciasne węzły, powyższe pytanie pozostawało długo bez odpowiedzi – dolne oszacowania były za małe, eksperymentalnie wyznaczane węzły zbyt długie. Dopiero w 2003 roku negatywną odpowiedź podał Diao [3], dowodząc, że dla dowolnej nietrywialnie zawęzłonej krzywej $L(\gamma) > 12$. Cztery lata później, wraz z Denne i Sullivanem, [2] poprawił oszacowanie pokazując, że $L(\gamma) > 15,66$.

Poszukiwania węzłów minimalizujących długość liny to w dużym stopniu zmagania algorytmiczno-numeryczne. Najkrótszy znany węzeł został wyznaczony numerycznie przez P. Pierańskiego w 1998 roku [6]. Długość liny o grubości jeden potrzebnej na jego związanie wynosi w przybliżeniu 16,37. Stosowane algorytmy polegają na zaciąganiu węzłów o zadanym położeniu startowym, spełniającym określone założenia, zatem przybliżają one minima lokalne $L(\gamma)$. Nie można jednak z całą pewnością stwierdzić, że wykrywają wszystkie takie minima, zatem nie można wykluczyć istnienia węzłów krótszych od tych wykrywanych algorytmicznie.

Tematyka związana z poszukiwaniem najkrótszych węzłów wciąż pełna jest naturalnych pytań pozostających bez odpowiedzi. Wiadomo, że w każdej klasie izotopii istnieje węzeł minimalizujący $L(\gamma)$, nie wiadomo jednak, jak regularny jest taki węzeł. Ponieważ każda krzywa o dodatnim promieniu globalnej krzywizny Menger'a jest klasy $C^{1,1}$ (tzn. ma lipschitzowsko ciągłą pochodną), to idealny węzeł będzie również klasy $C^{1,1}$. Nie wiadomo, czy musi być gładziej niż dowolna krzywa spełniająca warunek $\Delta(\gamma) > 0$ (symulacje numeryczne skłaniają ku poszukiwaniom negatywnej odpowiedzi). Nie wiadomo również, czy ideał jest tylko jeden. Może istnieje kilka nieizometrycznych konfiguracji, które realizują minimum?

W przypadku splotów, czyli układu kilku węzłów splecionych ze sobą, odpowiedzi na te pytania są znane. Łatwo wskazać dwa nieizometryczne sploty minimalizujące $L(\gamma)$. Istotnie, weźmy łańcuch złożony z trzech (trywialnych) ogniw, z których każde ma $\Delta(\gamma) = 1$. Gdy zminimalizujemy $L(\gamma)$ dostaniemy dwa okręgi, czy też torusy jeśli chcemy myśleć o „grubych krzywych”, oraz jedną („grubą”) krzywą stadionową przechodzącą przez środki obu okręgów, które są liniami centralnymi torusów. Oczywiście każdy z torusów ma pewną swobodę – możemy go obracać wzdłuż osi prostopadłej do płaszczyzny zawierającej krzywą stadionową, dostając w ten sposób nieizometryczne konfiguracje, nie zmieniając długości splotu. Przykład ten (zaczepnięty z [1]) pokazuje również, że nie możemy oczekiwać, że węzły składowe minimalnego splotu będą miały parametryzację klasy wyższej niż $C^{1,1}$ (druga pochodna parametryzacji krzywej stadionowej jest niezdefiniowana w czterech punktach). Rozważając bardziej złożone sploty, można wskazać układy minimalizujące energię, które nie tylko są nieizometryczne jako całość, ale ich odpowiednie składowe mają nieizometryczne kształty [1].

Numeryczne przybliżenie idealnego trójlistnika autorstwa H. Gerlacha



Krzywa stadionowa – składowa splotu minimalizującego długość liny w opisanym obok przykładzie, pozostałe dwie składowe splotu to okręgi o promieniu 0,5 przechodzące przez punkty A i B odpowiednio, których środki leżą w dowolnym miejscu na łuku stadionu.

Węzeł idealny – podejście drugie – energie węzłowe.

Przy poszukiwaniu idealnych węzłów nie musimy ograniczać się do minimów funkcjonału $L(\gamma)$. Możemy próbować je znaleźć również pośród minimów innych nieujemnych funkcjonałów niezmienniczych ze względu na podobieństwa. Funkcjonały takie nazywamy energiami węzłowymi.

Definicja. Niech \mathcal{S} będzie pewną podklasą klasy krzywych homeomorficznych z okręgiem zawartych w \mathbb{R}^3 . Funkcjonał $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest *energią węzłową* jeśli

$$\mathcal{F}(r(\gamma)) = \mathcal{F}(\gamma),$$

gdy $\gamma \in \mathcal{S}$, a r jest podobieństwem.

Oczywiście $L(\gamma)$ jest przykładem energii węzłowej. W klasie łamanych zamkniętych, energią węzłową jest na przykład liczba odcinków, które tworzą daną łamaną. Dla krzywych klasy C^2 energią jest całkowita krzywizna, definiowana jako

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_0^L \|\Gamma''(s)\| ds,$$

gdzie Γ to parametryzacja długością łuku krzywej γ , zaś L oznacza jej długość.

Dokładniej opiszemy tu energię O'Hary, opartą na oddziaływaniach odpychających między punktami położonymi na krzywej. Wyobraźmy sobie węzeł naładowany jednoimiennie – to znaczy taki, że każdy jego punkt obdarzony jest ładunkiem tej samej wielkości i znaku. Wówczas każde dwa punkty krzywej będą się odpychać, a cały układ będzie dążył do zminimalizowania energii, w wyniku czego krzywa powinna tracić zbędne pętliki i przepłyty, zyskiwać na regularności, innymi słowy – dążyć do ideału. W opisanej sytuacji siła oddziaływania między punktami jest proporcjonalna do kwadratu odwrotności ich odległości. Można by zatem sądzić, że sumę oddziaływań wszystkich par punktów z krzywej wyraża się całką

$$\int_0^L \int_0^L \frac{dx dy}{\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\|^2},$$

gdzie L oznacza długość krzywej, zaś Γ jej parametryzację długością łuku.

Jednak całka ta jest zawsze nieskończona. Problemy z całkowalnością pojawiają się w pobliżu przekątnej i są generowane przez każdą parę parametrów $x = y$. Dzieje się tak dlatego, że punkty leżące na krzywej nie mają pełnej swobody. Punkty, których łukowa odległość jest niewielka są przez krzywą ograniczane, chciałoby się powiedzieć „trzymaane blisko siebie”, zatem oddziaływania elektrostatyczne między nimi nie powinny więc mieć tak dużego wkładu w energię całego układu. Stąd też, aby uzyskać model bliższy opisywanej sytuacji należy „wyciąć”, czy też zniwelować część energii pochodzącej z oddziaływań między punktami leżącymi blisko na krzywej. Tak właśnie skonstruowana jest energia O'Hary

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\|^2} - \frac{1}{|x - y|^2} dx dy,$$

gdzie $|x - y|$ oznacza długość krótszego łuku krzywej łączącego punkty $\Gamma(x)$ i $\Gamma(y)$, czyli $|x - y| = \min\{|x - y|, L - |x - y|\}$. Energia ta została zbadana przez Freedmana, He i Wangą w pracy [4], z której pochodzą cytowane poniżej wyniki. Poświęćmy teraz chwilę, by przybliżyć własności energii \mathcal{E} . Po pierwsze pokażemy, że jest to istotnie energia węzłowa. Zauważmy, że odległość w przestrzeni dwóch punktów położonych na krzywej nie może być większa, niż długość łuku krzywej łączącej te punkty. Ponadto, Γ jest parametryzacją długością łuku, zatem

$$\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\| \leq \text{długość}(\gamma_{x,y}) = |x - y|,$$

stąd funkcja podcałkowa spełnia nierówność

Inną metodą uniknięcia osobliwości w całce jest odwołanie się do oddziaływań między trójkami punktów, wówczas zamiast odwrotności odległości między punktami, zastosowanie ma promień okręgu przechodzącego przez trójki punktów co prowadzi do energii $L^{p-3} \int_{[0,L]^3} R^{-p}(\Gamma(x), \Gamma(y), \Gamma(z)) d\lambda_3$

$$\frac{1}{\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\|^2} - \frac{1}{|x - y|^2} \geq 0,$$

co daje nieujemność energii. Niezmienniczość ze względu na izometrię jest oczywista, zaś by wykazać, że jednokładność (o środku w zerze) nie zmienia wartości energii wystarczy zauważyć, że jeśli $\Gamma(x)$ jest parametryzacją łuku krzywej γ , to $a\Gamma(x/a)$ parametryzuje łukiem krzywą $a\gamma$, zatem

$$\mathcal{E}(a\gamma) = \int_0^{aL} \int_0^{aL} \frac{1}{\|a\Gamma(x/a) - a\Gamma(y/a)\|^2} - \frac{1}{|x - y|^2} dx dy.$$

Podstawiając $u = ax$, $v = ay$ dostajemy

$$\mathcal{E}(a\gamma) = \int_0^L \int_0^L \left(\frac{1}{a^2 \|\Gamma(u) - \Gamma(v)\|^2} - \frac{1}{a^2 |u - v|^2} \right) a^2 du dv = \mathcal{E}(\gamma).$$

Energia O'Hary ma jeszcze jedną niezwykle przyjemną własność – inwersja nie zmienia wartości energii danej krzywej, o ile krzywa ta nie przechodzi przez środek sfery inwersyjnej. Przypomnijmy, że inwersja względem sfery o środku w a i promieniu r to przekształcenie, które wyraża się wzorem

$$T_{a,r}(x) = a + \left(\frac{r}{\|x - a\|} \right)^2 (x - a),$$

czyli innymi słowy inwersja $T_{a,r}$ przekształca punkt x , na punkt x' , leżący na prostej przechodzącej przez x i a , przy czym iloczyn odległości punktów x i x' od środka sfery a wynosi r^2 . W przypadku, gdy krzywa przechodzi przez środek sfery inwersyjnej, energia ulega zmianie, ale, co nas cieszy, zawsze w ten sam sposób – mianowicie zmniejsza się o 4. Poniższe twierdzenie z pracy [4] przytoczymy tu bez dowodu; mimo iż nie wymaga on stosowania zaawansowanych narzędzi jest dość długi i skomplikowany.

Twierdzenie.

$$\begin{aligned} \text{Jeśli } a \notin \gamma, \text{ to } \mathcal{E}(T_{a,r}(\gamma)) &= \mathcal{E}(\gamma). \\ \text{Jeśli } a \in \gamma, \text{ to } \mathcal{E}(T_{a,r}(\gamma \setminus \{a\})) &= \mathcal{E}(\gamma) - 4. \end{aligned}$$

Powyższe twierdzenie pozwala szybko i bez wysiłku wskazać minimum energii w klasie wszystkich krzywych zamkniętych, które można sparametryzować długością łuku (czyli zamkniętych krzywych prostowalnych).

Wniosek. Energia $\mathcal{E}(\gamma) \geq 4$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy γ jest okręgiem.

Dowód. Przekształćmy krzywą γ przez inwersję względem sfery o środku należącej do γ . Mamy wówczas

$$\mathcal{E}(\gamma) = \mathcal{E}(T_{a,r}(\gamma \setminus \{a\})) + 4 \geq 4$$

gdyż energia jest funkcją nieujemną. Równość zaś zachodzi tylko wtedy, gdy $\mathcal{E}(T_{a,r}(\gamma \setminus \{a\})) = 0$, czyli gdy $\mathcal{E}(T_{a,r}(\gamma \setminus \{a\}))$ jest linią prostą. Jako, że okrąg to jedyna krzywa zamknięta, której obrazem w inwersji jest prosta, dostajemy tezę.

Zauważmy, że przy okazji, bez przeprowadzania dodatkowych rachunków, otrzymaliśmy wartość energii dla okręgu $\mathcal{E}(S^1) = 4$. Wielkość tę można oczywiście wyznaczyć bez większych kłopotów bezpośrednio z definicji energii.

Zgodnie z oczekiwaniami, podobnie jak w przypadku funkcjonu $L(\gamma)$, globalnym minimum, a zarazem ideałem, okazał się okrąg. Przypomnijmy, że wiedząc, że długość liny, która tworzy węzeł jest mniejsza niż 15,66 możemy z całą pewnością stwierdzić, że mamy do czynienia z węzłem trywialnym. Okazuje się, że energia O'Hary ma podobną własność – mianowicie może być przydatna w rozpoznawaniu krzywych niezawężonych oraz w ocenie stopnia skomplikowania węzłów. Freedman, He i Wang wykazali, że jeśli $\mathcal{E}(\gamma) < 6\pi + 4 \approx 22,8$, to γ jest węzłem nietrywialnym. Udowodnili również, że jeśli $\mathcal{E}(\gamma) < M$, to liczba klas węzłów, które γ może reprezentować jest ograniczona przez $3 \cdot (1,7)^M$.

Wiemy już, że okrąg minimalizuje energię w klasie wszystkich krzywych. A co dzieje się, gdy zamiast rodziny wszystkich krzywych homeomorficznych z okręgiem będziemy poszukiwać ideału w klasie danego węzła? Okazuje się, że w każdej klasie istnieje krzywa, która realizuje w niej minimum funkcjonału. Co więcej, minima (a nawet minima lokalne) tego funkcjonału są idealnie gładkie – ich parametryzacja jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną. Dowód tego faktu rozбивa się na dwa istotne kroki. Pierwszy – to wykazanie, że minima są klasy $C^{1,1}$, drugi to przejście od $C^{1,1}$ do C^∞ . Te dwa etapy dowodu mają zupełnie inny charakter. Pierwszy, jest złożony, acz chciałoby się rzec elementarny. Ma on charakter mocno geometryczny i silnie korzysta z niezmienniczości energii ze względu na inwersję. Druga część wykorzystuje zaawansowane narzędzia analityczne, własności ułamkowych przestrzeni Sobolewa i operatory pseudoróżniczkowe.

Niestety nawet pierwszy etap dowodu jest zbyt skomplikowany i zawiera zbyt wiele technicznych szczegółów, by zawrzeć go w tym artykule. Aby nieco przybliżyć charakter dowodu zgrubnie naszkicujemy jego główne kroki. Zanim jednak przejdziemy do szkicu dowodu podamy ściśle sformułowanie twierdzenia. Przypomnijmy, że ε -otoczką krzywej γ nazywamy zbiór wszystkich punktów odległych od γ o mniej niż ε :

$$(\gamma)_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(x, \gamma) < \varepsilon\} = \bigcup_{x \in \gamma} B(x, \varepsilon),$$

gdzie $B(x, \varepsilon)$ oznacza kulę o środku w x i promieniu ε .

Twierdzenie (Freedman, He, Wang [4]). Niech κ będzie węzłem łagodnym. Jeśli γ jest lokalnym minimum energii \mathcal{E} w klasie κ (czyli, gdy γ dla pewnego $\varepsilon > 0$ minimalizuje energię w klasie wszystkich krzywych z klasy κ zawartych w ε -otoczce γ i takich, że γ zawiera się w ε -otoczce każdej z nich), to parametryzacja długością łuku krzywej γ jest klasy $C^{1,1}$.

Zarys dowodu. Dowód zaczyna się od wskazania pewnej operacji geometrycznej na węźle, która nie zwiększa jego energii. Jeśli krzywa leży po jednej stronie płaszczyzny i jest do niej styczna w co najmniej dwóch punktach, to przekształcając przez symetrię względem tej płaszczyzny jeden z łuków łączących punkty styczności, otrzymamy krzywą o energii nie większej od energii krzywej wyjściowej. Jest tak dlatego, że powyższa operacja nie zmienia długości łuków łączących punkty krzywej, nie zmniejsza odległości między żadnymi dwoma punktami krzywej, zaś zwiększa odległość między dowolnymi dwoma punktami krzywej, z których jeden pozostał na miejscu, a drugi w wyniku opisanej operacji zmienił położenie. Oznaczając wyjściową krzywą i jej parametryzację przez γ i Γ , zaś nową przez $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\Gamma}$ mamy

$$\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\| \leq \|\tilde{\Gamma}(x) - \tilde{\Gamma}(y)\|,$$

zatem

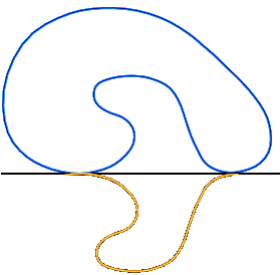
$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma) &= \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\|\Gamma(x) - \Gamma(y)\|^2} - \frac{1}{|x - y|^2} dx dy \\ &\geq \int_0^L \int_0^L \frac{1}{\|\tilde{\Gamma}(x) - \tilde{\Gamma}(y)\|^2} - \frac{1}{|x - y|^2} dx dy = \mathcal{E}(\tilde{\gamma}), \end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy jeden z łuków, na które rozcięły krzywą punkty styczności leży w całości na płaszczyźnie, względem której dokonujemy odbicia symetrycznego.

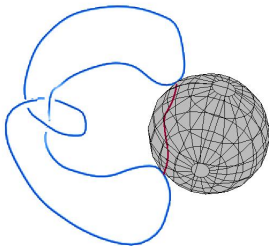
Korzystając z niezmienniczości energii ze względu na inwersję można skonstruować inną operację niezwiększającą energii. Załóżmy teraz, że mamy krzywą, która jest styczna do sfery S w dwóch punktach i znajduje się w całości na zewnątrz tej sfery. Możemy przekształcić S przez inwersję o środku należącym do sfery S , ale nienależącym do krzywej. Obrazem sfery będzie wówczas płaszczyzna, zaś obraz krzywej będzie do tej płaszczyzny styczny w dwóch punktach, przy czym energia krzywej nie zmieni się. Można teraz

Warunek podany w nawiasie w sformułowaniu twierdzenia jest równoważny minimalizowaniu energii wśród krzywych z danej klasy, których odległość Hausdorffa od γ jest mniejsza od ε

Uproszczona (dwuwymiarowa) ilustracja opisanej operacji, jasny łuk jest obrazem w symetrii krótszej części ciemnego łuku. Otrzymana w wyniku operacji krzywa składa się z jasnego łuku i z dłuższego łuku ciemnej krzywej.



Obrazem niebieskiej krzywej, jest krzywa składająca się z jej dłuższego łuku i łuku zawartego wewnątrz kuli.



Trzeba uważać, by stosując przekształcenie zmniejszające energię nie zmienić klasy węzła.

zastosować procedurę opisaną wcześniej zmniejszając zarazem energię krzywej i zastosować ponownie tę samą inwersję. W wyniku takiego ciągu operacji sfera pozostanie niezmienniona, zaś nowa krzywa będzie miała energię mniejszą od wyjściowej, o ile jeden z łuków łączących punkty styczności nie leżał w całości na sferze (w takim przypadku energia nie zmieni się). Zauważmy jeszcze, że w wyniku tej operacji jeden z łuków nie został zmodyfikowany, drugi zaś znalazł się w całości w kuli ograniczonej sferą S . Kolejne dość złożone rozumowanie, pozwala dowieść, że w przypadku, gdy sfera ma dostatecznie mały promień r , powyższa procedura nie zmienia klasy węzła, oraz nie wyprowadza poza r -otoczkę wyjściowej krzywej.

Opisaną powyżej operację niezwiększającą energii wykorzystuje się do wykazania, że jeśli krzywa będąca lokalnym minimum w danej klasie węzła leży na zewnątrz pewnej (dostatecznie małej) sfery i jest do niej styczna w (co najmniej) dwóch punktach, to krótszy łuk łączący te punkty musi w całości leżeć na sferze.

Dzieje się tak dlatego, że w przeciwnym przypadku moglibyśmy zastosować procedurę zmniejszającą energię, w wyniku czego dostalibyśmy krzywą z małego otoczenia (ε – otoczki) wyjściowej krzywej, o mniejszej od niej energii, co przeczyłoby założeniu, że wyjściowa krzywa jest minimum lokalnym energii \mathcal{E} .

Gdy wiadomo już, że zbiór punktów styczności dostatecznie małej sfery i krzywej minimalizującej energię jest zbiorem spójnym, można (choć wymaga to jeszcze sporego nakładu pracy) skonstruować otoczenie tubularne krzywej, złożone z rodziny dysków rozłącznych o ustalonym promieniu r , przy czym przez każdy punkt krzywej przechodzi dokładnie jeden dysk. Co więcej, dysk przechodzący przez punkt $\Gamma(x)$ ma tę własność, że dla każdego punktu dysku $\Gamma(x)$ jest najbliższym mu punktem krzywej. To zaś oznacza, że zdefiniowany w poprzedniej części artykułu globalny promień krzywizny Mengera spełnia warunek $\Delta(\gamma) > r$, możemy więc powołać się na cytowane wcześniej twierdzenie Gonzaleza i współpracowników, że warunek $\Delta(\gamma) > r$ gwarantuje lipschitzowską ciągłość pochodnej parametryzacji.

Literatura

- [1] J. Cantarella, R. Kusner, J. Sullivan, *On the minimum ropelength of knots and links*, arXiv:math/0103224v3
- [2] E. Denne, Y. Diao, J. Sullivan *Quadriseccants Give New Lower Bounds for the Ropelength of a Knot*, *Geometry and Topology*, 10, 1–26 (2006)
- [3] Y. Diao *The Lower Bounds of the Lengths of Thick Knots*, *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, Vol. 12, no. 1: 1–16 (2003)
- [4] M.H. Freedman, Zheng-Xu He i Zhengzhan Wang, *Möbius energy of knots and unknots*, *Ann. of Math. (2)* **139** (1994), 1–50.
- [5] O. Gonzalez, J.H. Maddocks, F. Schuricht, H. von der Mosel, *Global curvature and self-contact of nonlinearly elastic curves and rods*, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **14** (2002), 29–68.
- [6] P. Pierański. *In search of ideal knots* In A. Stasiak, V. Katritch, L. Kauffman, editors, *Ideal Knots*, pages 20–41. World Scientific, 1998