

O chirurgiach konkretnie i abstrakcyjnie

Zdzisław POGODA, Kraków

W matematycznej terminologii pojawiają się różne, czasem bardzo dziwne określenia, które niespecjalistom zupełnie się z matematyką nie kojarzą. Osoba niewtajemniczona ze zdziwieniem przeczyta o ciałach, pierścieniach, wiązkach, snopach, łańcuchach, drzewach, katastrofach, rączkach i... chirurgiach.

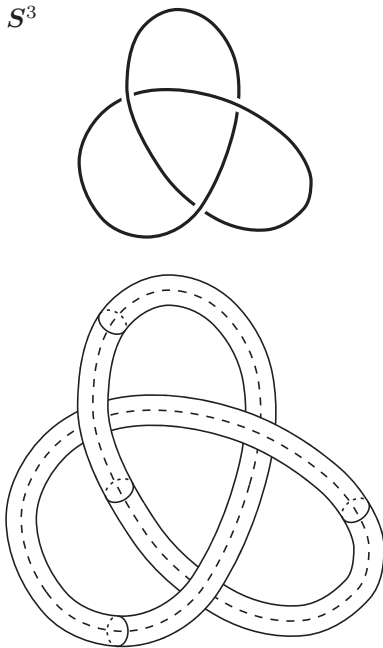
Chirurgia w naturalny sposób kojarzy się z medycyną. Matematycy również oswoili ten termin i zarówno w języku angielskim (surgery) jak i w polskim funkcjonuje on jako opis pewnych konstrukcji w topologii. Nie ma ogólnej definicji chirurgii, gdyż różne metody określa się tym terminem. Jednak wszystkie chirurgie wiążą się (nomen omen) z operacjami na zbiorach różnego typu. Najczęściej takich operacji dokonuje się na rozmaitościach, obiektach lokalnie wyglądających jak zwykła przestrzeń \mathbf{R}^n , które zrobiły ogromną karierę w matematyce XX wieku.

Gdy rozpoczynał się XX wiek nie istniała jeszcze precyzyjna definicja pojęcia rozmaitości. Choć idea jednego z najważniejszych pojęć matematycznych została przedstawiona przez Riemanna w jego wykładzie habilitacyjnym w 1854 roku, to musiało upłynąć sporo czasu, zanim uświadomiono sobie, że rozmaitości są bardzo użyteczne nie tylko w matematyce i mogą stanowić modele dla wielu teorii fizycznych. Do końca XIX wieku i na początku XX tylko nieliczni matematycy poświęcali pojęciu rozmaitości więcej uwagi. Wśród nich byli C. Jordan, A. Möbius, W. Dyck, F. Klein i H. Poincaré. Właśnie Henri Poincaré jako pierwszy precyzyjnie zdefiniował rozmaitości i w cyklu sześciu fundamentalnych prac (*Analysis situs* i pięć dodatków) badał ich własności tworząc niezbędny algebraiczny aparat i dając w ten sposób początek topologii algebraicznej. Oprócz rozmaitości dowolnego wymiaru, traktowanych jednak jako podzbiory pewnej przestrzeni euklidesowej, Poincaré studiował też bardziej szczególne przypadki, w tym rozmaitości trójwymiarowe.

Rozmaitości trójwymiarowe, nazywane krótko – choć nieelegancko – 3-rozmaitościami, stanowią wdzięczny obiekt badań, gdyż są bliskie intuicji i pewne techniki wykorzystane do badania powierzchni mogą być zastosowane w przypadku trójwymiarowym. Ponadto, po ogłoszeniu przez Markowa w 1958 roku twierdzenia o nieistnieniu ogólnej klasyfikacji rozmaitości cztero- i wyżej wymiarowych, tylko rodzina 3-rozmaitości mogła się jeszcze poddać próbie klasyfikacji. Specjaliści z nadzieją atakowali ten problem, który jednak okazał się bardzo trudny, co tym bardziej przyciągało nowych poszukiwaczy twardych problemów. Z początku wydawało się, że sukces jest na wyciągnięcie ręki. Walter von Dyck, pionier w tej dziedzinie, jeszcze pod koniec XIX wieku (w 1888 roku) zapowiedział program sklasyfikowania „przestrzeni trójwymiarowych”. Przypuszczał, czego jednak nie udowodnił, że każdą 3-rozmaitość można otrzymać przez sklejenie wzdłuż brzegu dwóch kul z uchami. Przypuszczenie Dycka uzasadnił dla rozmaitości posiadających triangulację duński matematyk Paul Heegaard (por. [3]). Mniej więcej w tym samym czasie Henri Poincaré napisał cykl fundamentalnych prac poświęconych topologii, gdzie w szczególności zajął się rozmaitościami trójwymiarowymi i przedstawił wiele sposobów ich konstrukcji (Dodatek V do *Analysis Situs*). Pojawiły się przy okazji poważne problemy z rozróżnianiem 3-rozmaitości z dokładnością do homeomorfizmu, gdyż opisane metody algebraiczne, doskonale sprawdzające się dla powierzchni, okazały się za mało czułe w wyższych wymiarach. Najlepszym przykładem jest hipoteza Poincarégo pozwalająca na topologiczną charakteryzację sfery. Matematycy znaleźli wiele różnych metod opisu 3-rozmaitości i sklasyfikowali sporo ciekawych rodzin tych rozmaitości.

Ciekawy sposób konstrukcji rozmaitości trójwymiarowych pochodzi od Maxa Dehna i obecnie nazywany jest chirurgią Dehna. Przypomnijmy na czym polega. Wyobraźmy sobie sferę trójwymiarową (oznaczmy ją tradycyjnie \mathbf{S}^3), a w niej umieszczony węzeł, czyli obiekt homeomorficzny z okręgiem. Tworzymy teraz

Poincaré używał nazwy *analysis situs* nawiązując do pracy Eulera o mostach królewieckich.

S^3 

Rys. 1

wokół węzła otoczkę w kształcie pełnej rurki. Topologicznie takie otoczenie jest homeomorficzne z pełnym torusem. Wybierzmy na tym torusie jeden z południków. Jeśli usuniemy torus ze sfery, to można pokazać, że pozostałość też jest pełnym torusem (z brzegiem lub bez w zależności od tego, czy wytniemy torus otwarty, czy nie). Wklejamy następnie torus ponownie, ale tak, żeby południk przeszedł na krzywą zamkniętą leżącą na powierzchni torusa i obiegającą go p razy południkowo i q razy równoleżnikowo.

Zanim przedstawimy bardziej formalną definicję chirurgii Dehna przypomnimy kilka pojęć. Przez rozmaitość trójwymiarową będziemy rozumieć spójną przestrzeń topologiczną, którą oznaczymy M , lokalnie homeomorficzną z przestrzenią trójwymiarową \mathbf{R}^3 . Założymy dodatkowo, że przestrzeń M jest zwarta – mówimy wtedy, że jest to rozmaitość zamknięta. Rozważa się często rozmaitości z brzegiem; wtedy lokalny homeomorfizm jest na \mathbf{R}^3 lub na domkniętą półprzestrzeń w \mathbf{R}^3 . Gdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z domkniętą półprzestrzenią, to powiemy, że punkt leży na brzegu rozmaitości. Wnętrzem 3-rozmaitości M nazwiemy zbiór punktów z M , które nie leżą na brzegu. Wnętrze oznaczymy podobnie jak w topologii int M . O ile zamkniętych 3-rozmaitości bez brzegu nie da się zanurzyć (czyli zobaczyć) w przestrzeni trójwymiarowej, o tyle rozmaitości z brzegiem są dostępne naszej intuicji, jak na przykład kula lub pełny torus. Brzegiem kuli jest naturalnie sfera S^2 , a brzegiem pełnego torusa klasyczny torus $S^1 \times S^1$.

Splot L jest to suma mnogościowa $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$ rozłącznych węzłów (czyli zwykłych krzywych zamkniętych, homeomorficznych z okręgiem). Składowe L_i nazywane są ogniwiemi splotu L .

Teraz, bardziej konkretnie i jednocześnie ogólnie, chirurgie możemy opisać następująco.

Niech będą dane

- trójwymiarowa rozmaitość M (może być z brzegiem),
- splot $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$ zawarty we wnętrzu rozmaitości M ,
- domknięte rozłączne otoczenia tubularne N_i dla każdego L_i , czyli rurki homeomorficzne z pełnymi torusami otaczające ogniwa splotu L , również zawarte we wnętrzu M ,
- wybrane krzywe J_i na brzegu każdego N_i

Konstruujemy nową rozmaitość trójwymiarową M'

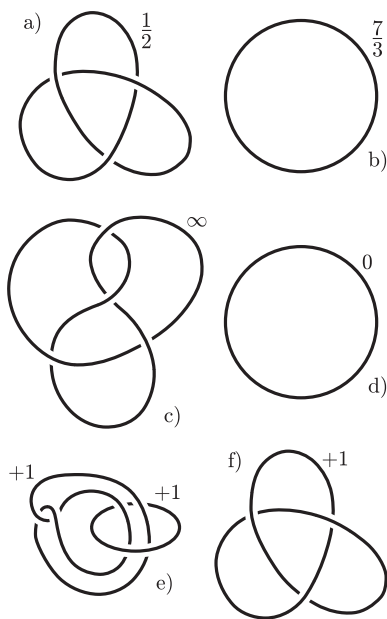
- z M usuwamy wnętrza otoczeń tubularnych N_i , czyli w pierwszym kroku bierzemy $M \setminus (\text{int } N_1 \cup \dots \cup \text{int } N_k)$,
- następnie wklejamy ponownie, ale już pełne otoczenia N_i w ten sposób, że południk m_i na brzegu N_i zostanie przekształcony na wyróżnioną krzywą J_i ; wklejenie to odbywa się za pomocą homeomorfizmów $h_i : \partial N_i \rightarrow \partial N_i$, które właśnie przekształcają południki na wskazane krzywe – ich sklejenie oznaczamy przez h .

W skrócie zapisujemy

$$M' = (M \setminus (\text{int } N_1 \cup \dots \cup \text{int } N_k)) \bigsqcup_k (\text{int } N_1 \cup \dots \cup \text{int } N_k)$$

Można pokazać, że konstrukcja M' nie zależy od h – tj. typ topologiczny M' nie zależy od homeomorfizmu sklejającego, byleby południki zostały przekształcone na odpowiednie krzywe.

O rozmaitości M' mówimy, że powstała w wyniku zastosowania chirurgii Dehna na rozmaitości M wzdłuż (albo względem) splotu L zgodnie z instrukcjami c)–d). Najczęściej chirurgie wykonujemy na S^3 lub \mathbf{R}^3 , krzywymi wyróżnionymi L_i są zorientowane (czyli z wybranym obiegiem) węzły dające się umieścić na torusie p_i razy obiegające południk i q_i razy obiegające równoleżnik. Wtedy z każdym ogniwiem L_i wiąże się liczbę $r_i = \pm p_i/q_i$ dopuszczając $r_i = 0$ lub $r_i = \infty$. Liczby r_i nazywamy współczynnikami chirurgii. Zakładamy przy tym, że liczby p_i oraz q_i są względnie pierwsze.

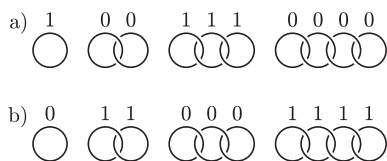


Rys. 2

Chirurgie przedstawiamy schematycznie na diagramie. Jest to po prostu rysunek węzła, względem którego dokonujemy chirurgii z dopisanym współczynnikiem pokazującym, jak się ma zachować południk przy ponownym wklejaniu torusa.

Na przykład diagram na rysunku 2a przedstawia chirurgię względem węzła typu „trójlistnik”, a współczynnik $1/2$ oznacza, że południk przejdzie na węzeł obiegający torus dwa razy „równoleżnikowo” i raz „południkowo”. Rysunek 2b opisuje chirurgię wzdłuż węzła trywialnego (wycinamy i wklejamy zwykły niezawężony torus), a południk skleja się z węzłem typu $(7, 3)$ na torusie. Wspomnieliśmy, że rozważa się jeszcze dwa specjalne przypadki, gdy współczynnik chirurgii jest równy ∞ oraz 0 . Na rysunku 2c mamy taki diagram. Licznik i mianownik są względnie pierwsze, a gdy współczynnik jest równy ∞ , to mianownik umownie równy jest 0 . Zatem licznik musi być równy ± 1 , bo największy wspólny dzielnik jest właśnie równy 1 . Oznacza to, że południk przekształca się na siebie, co najwyżej ze zmianą znaku, a to z kolei oznacza, że chirurgia ze współczynnikiem ∞ nic nie zmienia. W drugim przypadku, gdy współczynnik jest równy 0 , jak to ma miejsce na przykład na rys 2d, z tych samych powodów co poprzednio licznik jest równy 0 , a mianownik ± 1 . Prosta analiza sytuacji pokazuje, że w tym przypadku mamy do czynienia ze sklejeniem dwóch pełnych torusów tak, że południk skleja się z południkiem. W wyniku dostaniemy dobrze znaną rozmaitość $S^2 \times S^1$ (por. [3]). Przykłady 2e i 2f choć przedstawiają dwa różne diagramy, to w wyniku dają ten sam obiekt – sferę homologiczną (por. [4]).

Chirurgie Dehna pozwalają na sprowadzenie badania 3-rozmaitości do analizy węzłów i splotów, a więc na przejście od studiowania obiektów mimo wszystko abstrakcyjnych do bardziej uchwytnej intuicji. Są jednak poważne trudności, gdyż, jak pokazują przykłady, dana 3-rozmaitość może być opisana za pomocą chirurgii na nieskończenie wiele sposobów. Na przykład diagramy na rysunku 3a przedstawiają sferę S^3 , a na rys. 3b – $S^2 \times S^1$.



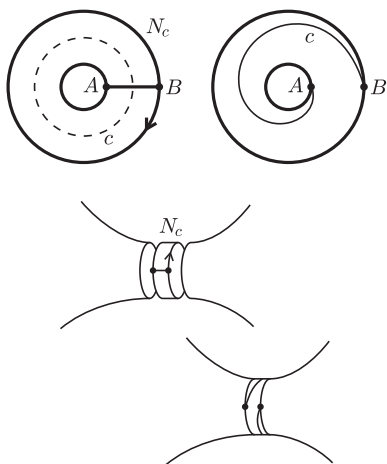
Rys. 3

Znaczenie chirurgii Dehna wzrosło dzięki udowodnieniu przez Lickorisha i niezależnie przez Wallace'a twierdzenia, że w zasadzie każdą rozmaitość trójwymiarową można otrzymać właśnie za pomocą chirurgii Dehna. Dokładniej prawdziwe jest:

Twierdzenie (Lickorish [2], Wallace)

Każda zamknięta 3-rozmaitość orientowalna może być otrzymana przez zastosowanie chirurgii Dehna wzdłuż pewnego splotu L . Ponadto splot można dobrać tak, że wszystkie współczynniki chirurgii dla ogniów będą równe ± 1 , a każde z ogniów nie będzie zawężone.

Orientowalność rozmaitości można określić w ten sposób, że otoczenie tubularne dowolnego węzła w rozmaitości jest homeomorficzne z pełnym torusem (gdyż w przeciwnym przypadku mogłoby być homeomorficzne z trójwymiarową butelką Kleina).



Rys. 4

W dowodzie twierdzenia podstawową rolę odgrywają homeomorfizmy powierzchni nazywane twistami (albo skręceniami) Dehna. Max Dehn zdefiniował twisty mniej więcej około 1920 roku, jednak definicji nie opublikował. Twistami zainteresował się niemal pół wieku później Lickorish, dlatego w literaturze można spotkać termin „twisty Lickorisha”. Twist wygląda następująco.

Wyobraźmy sobie krzywą zamkniętą c na powierzchni, utwórzmy wokół niej otoczenie pierścieniowe N_c . Wytnijmy teraz ten pierścień N_c z powierzchni i przekreślmy brzeg tak, by wskazany punkt z brzegu wykonał pełny obrót. A następnie wklejamy pierścień z powrotem do powierzchni; punkty brzegu skleja się tak, jak były „rozdzielone”.

Jeśli na okręgach ograniczających pierścień wybieramy po jednym punkcie „na przeciw” (na rys. 4 są to punkty A i B), które łączymy krzywą transwersalną do c , to krzywa ta przy twiście obiegnie pierścień dookoła przy niezmienionych końcach.

Mimo iż powierzchnie rozcinamy i ponownie skleamy, opisane przekształcenie jest homeomorfizmem. Zauważmy, że poza wybranym pierścieniem twist jest przekształceniem identycznościowym.

Lickorish udowodnił bardzo użyteczne twierdzenie dotyczące twistów i homeomorfizmów powierzchni, które odgrywa kluczową rolę w dowodzie twierdzenia o chirurgiach.

Twierdzenie (o twistach [2])

Niech M będzie zamkniętą powierzchnią homeomorficzną ze sferą z doklejoną pewną liczbą rączek (inaczej: takim „wielokrotnym” torusem), wtedy każdy homeomorfizm powierzchni M na siebie zachowujący orientację jest izotopijny ze złożeniem twistów wzdłuż „kanonicznych” krzywych na powierzchni przedstawionych na rys. 5.



Rys. 5

Żeby nie mnożyć definicji zaznaczymy tylko, że izotopijność odwzorowań oznacza pewną bardzo regularną deformację prowadzącą od jednego odwzorowania do drugiego i jest uogólnieniem deformacji pętli. Odwzorowania izotopijne w wielu sytuacjach traktuje się za niemal identyczne. Krzywe w powyższym twierdzeniu nie rozspajają (nie dzielą) powierzchni i wyznaczają jej typ topologiczny. Twierdzenie to pozwala na zastępowanie bardziej skomplikowanych chirurgii prostszymi bez zmiany wyniku.

Idea dowodu jest bardzo geometryczna. Najpierw stwierdzamy, że jeśli zwykle krzywe zamknięte mają jeden punkt wspólny, to, z dokładnością do izotopii, za pomocą odpowiednio dobranego twistu można przekształcić jedną krzywą na drugą. Następnie, manipulując właśnie twistami, pokazuje się, jak zmieniać położenie krzywych zamkniętych względem „południków”, czyli uwalniać od przecięć lub doprowadzać tylko do jednego przecięcia. Wreszcie sprawdzamy, które krzywe można zdjąć z rączek i jak przekształcić je na „południki” lub inne krzywe kanoniczne. Szczegóły, trochę techniczne, bardzo ładnie są opisane w książce Stillwella [5]. Przy okazji, dobierając odpowiednio twisty można na przykład pokazać, że diagramy na rysunkach 2e i 2f są równoważne.

Gdy wiemy już, jak radzić sobie z krzywymi na wielokrotnym torusie, to można przejść do dowodu zasadniczego twierdzenia o chirurgiach wykorzystując fakt, że 3-rozmaitość można rozłożyć na dwie kule z rączkami (rozkład Heegaarda), a następnie na przykład wykorzystać indukcję ze względu na genus, czyli minimalną liczbę rączek (dziur w torusie) w rozkładzie rozmaitości (por. [3], [4], [5]).

Chirurgie Dehna próbowano wykorzystać do obalenia hipotezy Poincarégo, bo, jak nietrudno się domyśleć, obok usilnych prób udowodnienia tej hipotezy, poszukiwano również kontrprzykładów. Próby takie nasiliły się pod koniec lat sześćdziesiątych XX wieku, gdy klasyczna hipoteza zdecydowanie opierała się atakom najtęższych umysłów matematycznych. Jednym z sugerujących poszukiwanie kontrprzykładów był R.H. Bing. Sformułował on dla węzłów pewną własność nazywaną powszechnie własnością P.

Węzeł ma własność P, gdy każda nietrywialna chirurgia względem tego węzła prowadzi do konstrukcji rozmaitości niejednospójnej.

Jednospójność rozmaitości oznacza, że dowolna pętla w niej zawarta, może być w tej rozmaitości ściągnięta do punktu. Przypomnijmy, że klasyczna hipoteza Poincarégo głosi, iż zamknięta, zwarta i jednospójna rozmaitość trójwymiarowa jest homeomorficzna z S^3 . Gdyby udało się znaleźć nietrywialny węzeł dający w wyniku chirurgii rozmaitość jednospójną – a więc nie posiadający własności P – to mielibyśmy kandydata na kontrprzykład do hipotezy Poincarégo. Nie trzeba tłumaczyć, że węzeł trywialny nie ma własności P i był to jedyny przykład węzła bez tej własności. Na początku lat siedemdziesiątych Bing oraz Martin sformułowali hipotezę, że każdy węzeł w S^3 nierównoważny z trywialnym – czyli nie dający się rozplątać – ma własność P. Udowodniono, że wiele bardzo ważnych rodzin węzłów własność P ma. Ogólna hipoteza jednak się nie poddawała. Przypuszczano pomimo tego, że metody dowodu lub

obalenia hipotezy będą zbliżone do tych jakie wykorzystywano przy dowodzeniu twierdzeń o chirurgiach Dehna.

Nie tak dawno, bo w 2004 roku Peter Kronheimer z Harvard University i Tomasz Mrowka z MIT opublikowali – w sumie nie tak długą, bo liczącą 15 stron – pracę, w której w końcu udowodnili hipotezę Binga–Martina.

Kluczową rolę odgrywa twierdzenie, które wygląda dość niewinnie, jak na możliwości teorii.

Twierdzenie (Kronheimer, Mrowka [1])

Jeśli 3-rozmaitość M jest otrzymana za pomocą chirurgii o współczynniku $+1$ względem węzła K , to istnieje nietrywialny homomorfizm grupy $\pi_1(M)$ w grupę $SO(3)$.

Grupa $SO(3)$ – specjalna grupa ortogonalna – jest interpretowana jako grupa obrotów w przestrzeni trójwymiarowej. Natomiast $\pi_1(M)$ oznacza grupę podstawową rozmaitości M , czyli, ogólnie i nieco nieprecyzyjnie, grupę generowaną przez typy pętli ze względu na sposób ściągnięcia ich do punktu. Nietrywialność homomorfizmu oznacza, że $\pi_1(M)$ też nie jest grupą trywialną, a więc istnieją w M pętle nie dające się ściągnąć do punktu, co z kolei gwarantuje niejednoznaczność rozmaitości. Rozstrzyga to definitywnie hipotezę Binga–Martina. Zaskakująco skomplikowane, wbrew przypuszczeniom, są narzędzia użyte do dowodu hipotezy; konkretny problem został rozwiązany za pomocą wysoce abstrakcyjnych środków.

Przytoczmy za autorami najważniejsze fakty i twierdzenia wykorzystane w dowodzie.

- Twierdzenie Taubesa o niezerowaniu się niezmienników Seiberga–Wittena dla symplektycznych 4-rozmaitości.
- Twierdzenie Gabai o istnieniu napiętych foliacji na 3-rozmaitościach z niezerowymi liczbami Bettiego.
- Konstrukcja Eliashberga–Thurstona struktury kontaktowej z foliacji.
- Trójkąt dokładny Floera dla instantonowych homologii Floera.
- Rezultat Eliashberga o wklęsłych wypełnieniach kontaktowych 3-rozmaitości.
- Słaba wersja hipotezy Wittena o niezmiennikach Seiberga–Wittena i Donaldsona dla gładkich rozmaitości czterowymiarowych.

Takich, przyprawiających o zawrót głowy, środków trzeba było użyć, żeby pokazać, iż jedynym węzłem nie posiadającym własności P jest węzeł trywialny. Tym samym ostatecznie stwierdzono, że chirurgie Dehna nie mogą prowadzić do kontrprzykładu do hipotezy Poincarégo. Gdy Kronheimer i Mrowka opublikowali swoją pracę znane już były słynne preprinty Grishy Perelmana zawierające między innymi dowód hipotezy Poincarégo. Nie umniejsza to jednak znaczenia ich wyników. Więcej dowiadujemy się o chirurgiach Dehna i węzłach w S^3 . Na przykład okazało się, że węzły są jednoznacznie wyznaczone przez swoje dopełnienia w S^3 . Przy okazji, nie pierwszy raz zresztą, przekonujemy się, jak w zadziwiający sposób łączą się i przenikają wysoce abstrakcyjne twierdzenia i techniki dając bardzo konkretne i intuicyjnie przekonujące rezultaty.

Literatura

- [1] P. Kronheimer, T. Mrowka, *Witten conjecture and property P*, vol. 8 (2004), 295–310.
- [2] W.B.R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, *Annals of Math.* 76 (1962), 531–540.
- [3] Z. Pogoda, *Problemy z 3-rozmaitościami*. Zeszyty OKM nr 40 I 2008.
- [4] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc. Berkeley 1976.
- [5] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag 1980.