

# Problemy nauczania matematyki

*Zdzisław POGODA, Kraków*

Stwierdzenie, że nauczanie matematyki jest zadaniem bardzo ważnym, już dawno zostało zaliczone do truizmów. Nikt nie ma wątpliwości, co do znaczenia takiej działalności; wszyscy przecież wiedzą, jak ogromne jest znaczenie matematyki w świecie współczesnym. A jednak daje się zauważyć coraz słabszą znajomość matematyki w społeczeństwie, mimo, paradoksalnie, coraz większej komputeryzacji – choć, znów stereotypowo, obecnie matematykę kojarzy się z komputerami. Istotny regres w nauczaniu matematyki w szkole jest faktem: spada liczba godzin przeznaczonych na matematykę, ogranicza się drastycznie programy, matematyka nie jest już elementem wykształcenia ogólnego na poziomie matury, bo jest na niej nieobowiązkowa. Wspomina się, co prawda, o przywróceniu obowiązkowej matematyki na maturze, ale... czyż można wierzyć politykom?

Mimo iż z wiedzą matematyczną nie jest najlepiej, to można zaryzykować stwierdzenie, że na nauczaniu matematyki – i na nauczaniu w ogóle – zna się niemal każdy, jak na medycynie, czy sporcie. Trudno bowiem znaleźć osobę, która nie miałaby na ten temat żadnego poglądu. Często można usłyszeć, czego i jak powinno się uczyć na lekcjach matematyki, a co koniecznie pominąć. Daje się też zauważyć pogląd, że matematyki może uczyć każdy, kto tylko na studiach miał zajęcia z tego przedmiotu. Czyli kształceniem matematycznym może zajmować się ktoś, kto miał jakikolwiek kontakt z matematyką lub nawet tylko z jej nazwą – jako nauczycieli matematyki zatrudnia się czasem osoby, które ukończyły dowolny kierunek (np. wychowanie techniczne) na wydziale mającym w nazwie matematykę. Ostatnio jeden z wiceministrów stwierdził, że praca nauczyciela niczym nie różni się od pracy w biurze. Efekty takiego myślenia i postępowania są już widoczne – wystarczy choćby przyjrzeć się wynikom matury z matematyki w latach 2005 i 2006.

O problemach nauczania matematyki napisano wiele artykułów i książek. Zmieniały się koncepcje, poszukiwano różnych metod, aby jak najlepiej uczyć elementów dziedziny, którą nazwano królową nauk. Ostatnio Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe zaproponowało niezwykle ciekawą serię książek poświęconych właśnie nauczaniu matematyki pod wspólnym tytułem *O nauczaniu matematyki*. Autorem ośmiotomowej pozycji jest Michał Szurek prowadzący gościnnie na Uniwersytecie Jagiellońskim od kilku lat wykłady z dydaktyki matematyki dla studentów matematyki, którzy postanowili zaliczyć tak zwany blok pedagogiczny. Można by więc przypuszczać, że czytelnik dostaje do ręki rozbudowany kurs dydaktyki matematyki oparty na przemyśleniach Autora w związku z prowadzonym wykładem. A jednak nie! Choć sporo fragmentów książki (książek) rzeczywiście nawiązuje do krakowskich wykładów, to jednak dydaktyka matematyki jest tylko jednym z zagadnień poruszanych przez Szurka. Pamiętajmy jednak, że dydaktyka to „dział pedagogiki: nauka o metodach nauczania i uczenia się”, jak twierdzą słowniki i encyklopedie. Wydaje się więc dziwne, że książka o nauczaniu matematyki, to nie książka z dydaktyki. Naturalnie, rozumiejąc bardzo ogólnie termin „dydaktyka”, można by do niej zaliczyć wszystko, co wiąże się z nauczaniem, a zatem i również treści nauczania, elementy historii przedmiotu, problemy psychologiczne z rozumieniem pojęć, różne zagadnienia socjologiczne i wiele jeszcze innych, o których pisze Szurek. Autor zapewne celowo chciał uniknąć terminu „dydaktyka” w tytule swojego dzieła, żeby nie zostać posądzonym przez specjalistów o częste odchodzenie od tematu.

Książki podzielone są na wykłady (w każdej są dwa lub trzy wykłady), z których każdy można traktować jako esej na wybrany temat. Określenie wykład jest tu bardzo umowne, bowiem niektóre rozdziały-wykłady są tak rozbudowane, że mogłyby stanowić cały cykl wykładów. Autor chętnie robi różne dygresje, sięga po cytaty nie tylko z literatury przedmiotu, lecz także z literatury pięknej i poezji. Pełno jest w wykładach uwag o charakterze historycznym. Nie brakuje też przykładów konkretnych zadań oraz różnego typu ciekawostek, anegdot i łamigłówek.

Pierwszy wykład, noszący tytuł *Uczę świadomie, a więc lepiej i ciekawiej*, poświęcony jest dyskusji nad takimi pytaniami jak: Co to jest matematyka? Co

to jest szkoła? Co to jest uniwersytet? Co to jest dydaktyka? Autor zastanawia się nad paradygmatem matematyki, społeczną rolą wykształcenia w naukach ścisłych. Wyjaśnia, dla kogo przeznaczona jest jego książka. Jest tam też o kulturze i... Nicolaisie Bourbakim. Czytelnik może się dowiedzieć, czym różni się poszerzanie wiedzy od jej pogłębiania. W następnym wykładzie *Dodawanie i odejmowanie* analizowane są problemy związane z wprowadzaniem tytułowych działań. Czy lekcje poświęcone dodawaniu i odejmowaniu mogą być ciekawe? Autor stara się przekonać czytelnika, że tak. Przypomina mniej znane algorytmy dodawania i odejmowania, proponuje interesujące zadania. Przy okazji zwraca uwagę na sprawę niezwykle ważną i wydawałoby się oczywistą: „im niższe klasy, tym nauczanie jest trudniejsze”. Oczywiście? Z pewnością nie dla decydentów sądząc po ich różnych decyzjach. Po dodawaniu i odejmowaniu kolejnymi omawianymi działaniami są mnożenie i dzielenie. I tu nie brakuje informacji o różnych algorytmach. Wspomina się również o wielu problemach związanych z nauczaniem własności tych działań – na przykład analizowany jest problem przemienności mnożenia oraz definiowania ułamków.

W następnym wykładzie Autor znów powraca do pytań zasadniczych: po co uczyć matematyki? Jakie są cele nauczania matematyki? Jakie są cele kształcenia w ogóle? Z takimi pytaniami musi się zetknąć każdy przyszły nauczyciel – powinien przecież wiedzieć, co chce osiągnąć, do czego zmierza. Przy okazji zasygnalizowana jest rola nauczyciela w procesie kształcenia. Możemy się też przekonać dzięki licznym przykładom z historii, że od dawien dawna nauczyciele traktowani byli przez władze po macoszemu, choć zawsze chętnie podkreślano znaczenie ich pracy i obiecywano „złote góry”. Piąty wykład, zatytułowany *Światy liczbowe*, znów jest poświęcony liczbom – teraz jednak konstrukcji nowych typów liczb i trudnościom z ich wprowadzeniem w szkole. A dalej, w wykładzie *Zasady dydaktyczne, metody, sposoby i formy nauczania*, następuje powrót do dydaktyki ogólnej; tym razem rozważania dotyczą pytania – jak? Czyli, zgodnie z tytułem, mowa jest właśnie o zasadach dydaktycznych, metodach, sposobach i formach nauczania i, choć wykłady nie są typowymi wykładami z dydaktyki matematyki, to jednak takie elementy powinny się w nich znaleźć. Tu, z oryginalnymi komentarzami i przemyśleniami Autora. Można się domyśleć, że po porcji dydaktyki przewagę uzyskają znów elementy matematyczne. W wykładzie siódmym Starzy znajomi, omówione są zadania, za którymi uczniowie szczególnie nie przepadają: o pociągach, rowerzystach, roztworach, stopach, robotnikach itp., czyli zadania tekstowe zawsze sprawiające kłopoty... nie tylko uczniom.

Wykład ósmy Autor poświęcił problemom uczenia się. Aby uczyć innych, trzeba umieć samemu się uczyć, mieć świadomość problemów z tym związanych. Jest więc tam o pamięci, zapamiętywaniu, rozumieniu, zapominaniu, a także o wyobraźni i dydaktyce Jeana Piageta. Wszystko, jak zawsze, przeplatane jest niezwykle, zaskakującymi ćwiczeniami. Kolejny wykład poświęcony jest logice. Matematyka uważana jest za naukę logicznego myślenia, czy jednak w szkole należy uczyć elementów logiki formalnej? Jeśli nie, to jak uczyć logicznego myślenia? Czy tylko na przykładach w postaci zadań i problemów z geometrii? To tylko nieliczne przykłady pytań poruszanych przez Autora w tym rozdziale.

W tomie piątym, jak w większości, są także dwa wykłady. Pierwszy (a dziesiąty w kolejności) poświęcony jest trójmianowi kwadratowemu – bohaterowi wielu zadań, chętnie wykorzystywanemu na egzaminach. Autor zwraca uwagę na rozmaite powiązania i zastosowania tego pojęcia. Pojawia się między innymi jedno z najbardziej modnych – równanie logistyczne wykorzystywane w teorii chaosu. Drugi wykład, czyli jedenasty z kolei, ponownie jest o liczbach; tym razem dyskutowane jest miejsce liczb (naturalnych) w kulturze. Czytelnik ma okazję poznać symbolikę związaną z niektórymi liczbami i przekonać się, że tak naprawdę każda liczba jest wyjątkowa.

Jeśli uczymy innych, to chcielibyśmy poznać efekty naszej pracy. Jak zatem sprawdzić obiektywnie wiedzę uczniów? Jak ich sprawiedliwie ocenić? W jakiej formie organizować sprawdziany i egzaminy? Czym się różni egzamin sprawdzający od różnicującego? Czy można pomagać uczniom na egzaminie? To znów tylko wybrane pytania rozważane przez Szurka w tomie szóstym, który zawiera tylko jeden, ale za to bardzo długi, wykład poświęcony problemom oceniania i sprawdzania wiedzy. Ponadto w tym wykładzie, nie tylko jako

ciekawostkę, można znaleźć zestawy sprawdzające dla uczniów X klasy z 1954 roku oraz wiele anegdot o egzaminach.

Gdy zastanawiamy się nad problemami nauczania matematyki, to należy zwrócić uwagę na konkretne dziedziny królowej nauk. Autor nawiązuje jeszcze do trzech działów: matematyki finansowej, statystyki i geometrii. Wykład 13 – *Pieniądze* – zawiera rozważania dotyczące matematyki finansowej, obecnie chyba najmłodniejszej i szybko rozwijającej się dziedziny matematyki. W zasadzie są to „starzy znajomi”, bo rozmaite zadania o obliczaniu procentów. Kontekst jest jednak inny. Najpierw Szurek przypomina historię pieniądza, a następnie omawia problemy dotyczące takich zagadnień jak dyskontowanie i kapitalizacja, obniżki i podwyżki, stopa nominalna i efektywna, inflacja, kredyty, obligacje, podatki, czy wreszcie opcje. Jest to więc krótki kurs podstaw matematyki finansowej z elementami dydaktyki ilustrowany ciekawie dobranymi przykładami i ważnymi komentarzami. Chociaż sprawy finansowe tylko w niewielkim stopniu pojawiają się w programach szkolnych, to można przypuszczać, że w najbliższym czasie zaczną zajmować coraz więcej miejsca. Drugi wykład przedostatniego, siódmego tomu poświęcony jest statystyce opisowej. Ze statystyką, podobnie jak z finansami mamy do czynienia na co dzień. Jesteśmy bombardowani różnymi danymi statystycznymi: o zarobkach, o popularności partii lub polityków, o kondycji gospodarki, czy poglądach Polaków. Autor pisze o tym, jak właściwie i rzetelnie należy prezentować dane, jak umiejętnie je interpretować. Zwraca też uwagę na możliwości manipulacji i jak się przed nimi bronić. Przedstawia też problemy arytmetyki wyborczej.

Ostatni tom zawiera trzy wykłady. W pierwszym, równie długim jak rozdział o ocenianiu, głównym bohaterem jest geometria. Nie znaczy to, że wcześniej o niej nie wspomniano. Stanowiła jednak raczej źródło przykładów ilustrujących inne problemy. O nauczaniu geometrii można by napisać osobną wielotomową rozprawę. Można mieć wątpliwości co do stwierdzenia, że geometria była jest i będzie najważniejsza w nauczaniu matematyki. Trudno jednak przecenić jej znaczenie w tej dziedzinie. Autor z konieczności porusza tylko niektóre zagadnienia. Pisze o zakresie geometrii, specyficznych celach jej nauczania, problemach definiowania i dowodzenia. Analizuje wprowadzanie wybranych obiektów. Chętnie nawiązuje do tematów znacznie wykraczających poza program. Wspominając o koncepcjach przestrzeni cytuje fragmenty z wykładu habilitacyjnego Riemanna. Zajmuje się geometrią w  $n$  wymiarach; oblicza objętość  $n$ -wymiarowej kuli i  $n$ -wymiarowego sympleksu.

Przedostatni wykład *Matematyka z oddali* ma charakter bardziej filozoficzny. Jest tam o nieskończoności, metafizyce, epistemologii i ontologii. Jak pisze sam Autor, jest to zbiór refleksji po lekturze eseju Leszka Kołakowskiego *Matematyk i mistyk*. Powracają pytania dotyczące istoty matematyki, jej roli w opisie świata i rozumieniu... nas samych.

Wreszcie ostatni wykład jest taką gawędą z refleksjami nawiązującymi do wszystkich wcześniejszych rozważań. Autor zawarł tam wiele ciekawych spostrzeżeń również natury ogólnej. Niemal w każdym wykładzie pojawiają się przykłady proponujące wykorzystanie komputera. Jednak stosunek Szurka do komputera nie jest czolobitny. Nie uważa, że jest to lekarstwo dobre na wszystko, które za nas wykona całą robotę. Zwraca uwagę, iż bardzo często w „nauczaniu komputerowym” treść bywa mylona z formą. Zamiast o tym, co i jak pisać, zastanawiamy się, jak redagować, a forma prezentacji przesłania treść. Czytelnikowi można polecić „Poradnik dla wychowawcy klasy maturalnej” – zabawny sposób, jak poradzić maturzyście wybór przyszłego zawodu.

Naturalnie ten pobieżny przegląd nie pokazuje całego bogactwa problemów poruszanych przez Autora. Wiele z przedstawionych wykładów tak naprawdę, mogłoby być cyklem wykładów na poruszany temat. A niemal każdy z wykładów może być podstawą osobnego wykładu monograficznego lub kursowego. Specjaliści zwrócą być może uwagę, że w wykładach praktycznie nie ma rachunku prawdopodobieństwa, kombinatoryki i elementów analizy. Z pewnością istnieją poważne argumenty uzasadniające konieczność poświęcenia większej uwagi tym dziedzinom. Należy jednak uszanować prawo Autora do własnego doboru tematyki, a uzasadnienie, dlaczego jedne działy omawiane są bardziej szczegółowo, a inne mniej, można potraktować jako jeszcze jedno ćwiczenie uzupełniające.

Już na początku zostało zaznaczone, że wykłady nie pretendują do miana książki naukowej, ani poradnika metodycznego. Nie jest to także podręcznik z dydaktyki ani pozycja popularnonaukowa. Choć śmiało można stwierdzić, że książka Szurka ma po trosze wszystkie wymienione cechy. Uważny czytelnik może znaleźć wiele cennych, konkretnych informacji z zakresu samej matematyki, jej historii, filozofii i dydaktyki. Niektóre tezy sformułowane są dość jednoznacznie i nie każdy zechce się z nimi zgodzić. To jednak zmusza do zastanowienia i określenia własnego poglądu. W wielu innych miejscach czytelnik staje przed wyborem propozycji albo odrzuceniem wszystkich, co także zachęca do wypracowania indywidualnego stanowiska. W tak rozbudowanym dziele nietrudno wskazać nieścisłości albo nie do końca jasne miejsca. I to można uznać za zaletę, bowiem błędne lub niejasne rozumowanie może znacznie więcej nauczyć niż, zwalniające od myślenia, poprawne „wyłożenie kawy na ławę”. Autor często wspomina o pojęciach matematycznych, których nie tłumaczy. To też może zachęcić dociekliwego czytelnika do samodzielnego odnalezienia znaczenia niezrozumiałych haseł. Wykłady pełne są cytatów z innych książek – często z literatury pięknej, fragmentów wierszy i piosenek. Trudno chyba byłoby znaleźć w literaturze światowej książkę o nauczaniu matematyki tak bogato ilustrowaną cytatami, szczególnie z literatury pięknej.

Wielką zaletą wykładów są proponowane niezwykle, nietypowe ćwiczenia. Czytelnik zachęcany jest nie tylko do rozwiązywania przeróżnych zadań, lecz także układania nowych, do wędrowki po stronach internetowych, do analizowania tekstów innych podręczników, interpretacji wierszy, pisania wypracowań albo dyskusji ze znajomymi. Gdyby zebrać wszystkie te zadania i polecenia w osobny tom, byłby to zapewne jeden z najbardziej niezwykłych zbiorów zadań, jaki kiedykolwiek powstał.

Książka – jako zestaw wszystkich tomów – nie ma jednoznacznie określonego adresata. Wykłady, na bazie których powstała, przeznaczone były dla studentów starszych lat matematyki myślących ewentualnie o pracy w szkole. Jednak, jak także zaznacza sam Autor, po książkę mogą sięgnąć nauczyciele, którzy chcą doskonalić swój warsztat pracy, pragnący przeanalizować i zrewidować rozmaite poglądy na problemy nauczania. Nauczyciele akademicy też znajdą wiele cennych informacji lub problemów do przemyśleń. Specjaliści dydaktycy przeczytają krytycznie wykłady Szurka z zawodowego obowiązku. Ich krytyka w efekcie może jednak przyczynić się do lepszego kształcenia nauczycieli i bardziej efektywnego nauczania matematyki w szkole. Warto, żeby do książki zajrzeli również ci, którzy twierdzą, że do nauczania matematyki wystarczy tylko merytoryczne przygotowanie, a reszta przyjdzie wraz z doświadczeniem. Po książkę może wreszcie sięgnąć każdy, kto chciałby dowiedzieć się czegoś nie tylko o nauczaniu matematyki, lecz przy okazji o samej matematyce, jej historii i filozofii, bez wchodzenia w zbyt szczegółowe rozważania.

Należy wyrazić uznanie dla Gdańskiego Wydawnictwa Oświatowego, że odważyło się wydać tak rozbudowane dzieło – zrobiono to zresztą w tempie iście ekspresowym – i udostępnić je wszystkim chcącym poznać poglądy Michała Szurka na temat nauczania matematyki. O tym, czy książka zostanie zaakceptowana, zadecydują czytelnicy, którzy ostatecznie ocenią jej przydatność.

Michał Szurek

*O nauczaniu matematyki*

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2006

Tom 1: *Uczę świadomie, a więc lepiej i ciekawiej. Dodawanie i odejmowanie. Mnożenie i dzielenie.*

Tom 2: *Po co uczę matematyki? Światy liczbowe.*

Tom 3: *Zasady dydaktyczne, metody, sposoby i formy nauczania.*

Tom 4: *Jak się uczyć? Logika.*

Tom 5: *Trójmian kwadratowy. Liczby w kulturze.*

Tom 6: *Jak badać efekty naszej pracy, czyli o ocenianiu.*

Tom 7: *Pieniądze. Statystyka opisowa.*

Tom 8: *Geometria. Matematyka z oddali. XXI wiek, czyli o matematyce przy kominku.*