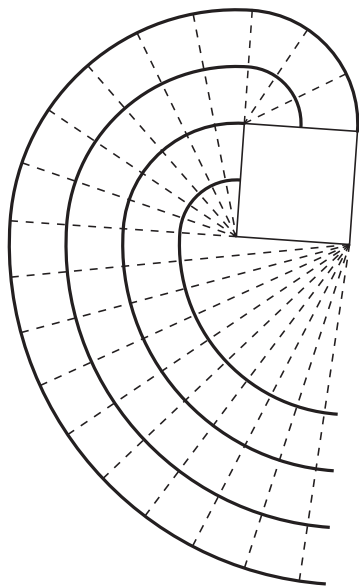


O gładkich krzywiznach

Marek KORDOS, Warszawa



Grube linie są gładkie, ale tylko w stopniu 0.

Witek Sadowski ma ogromnie cenną umiejętność zlecania prac, od których nie sposób się wymówić, a przy tym skrajnie trudnych. Oczywiście chodzi w nich o popularyzację. I właśnie od niego otrzymałem propozycję nie do odrzucenia, aby na Festiwalu Nauki opowiedzieć o *theorema egregium* Gaussa. To, co jest napisane dalej, jest próbą opowiedzenia o tej problematyce w sposób nieskażony formalizmem, dostępny dla tzw. laika, ale jednak merytorycznie uczciwy. Jeśli jest to całkiem do niczego, to część winy spada na Witka.

* * *

To, o czym będzie mowa, można nazwać „nadzwyczajne konsekwencje gładkości”. Okazuje się bowiem, że narzucenie warunku (jakiegoś tam stopnia) gładkości na rozpatrywane krzywe czy powierzchnie powoduje, że wykazują one wiele nieoczywistych regularności.

Każdy się zgodzi, że brzeg kwadratu gładki nie jest. Rozwijając z niego napiętą nici, jak na rysunku, uzyskujemy już coś gładkiego. Ale to bardzo prymitywna gładkość – zakrzywienie toru końca nici zmienia się raptownie wszędzie tam, gdzie nici odrywa się od kolejnego boku kwadratu. Taka gładkość to gładkość z numerem 0. Koniec napiętej nici rozwijanej z jakiejś krzywej daje nam krzywą o większej gładkości. I tak, koniec napiętej nici rozwijanej z krzywej o gładkości 0 ma gładkość 1; podobnie określamy gładkość 2, 3 itd. Można wyobrazić sobie analogiczną definicję gładkości powierzchni.

Geometria różniczkowa zajmuje się konsekwencjami gładkości w geometrii. Dokładniej: zajmuje się badaniem, jak z lokalnych własności gładkich krzywych i powierzchni wynikają ich własności globalne, całościowe. Do różnych twierdzeń geometrii różniczkowej potrzebne jest założenie różnego stopnia gładkości. Tu będę zakładał poziom gładkości 3 – przy takim założeniu wszystkie twierdzenia, o których będzie mowa, dadzą się udowodnić.

Najbardziej efektownym twierdzeniem o krzywych gładkich jest twierdzenie Fréneta–Serreta. Jest w nim mowa o *krzywiznie* i *skręceniu*. Krzywizna krzywej w danym punkcie to odwrotność promienia okręgu najlepiej udającego tę krzywą w otoczeniu tego punktu (lub zero, gdy takiego nie ma). Płaszczyznę, w której leży ten okrąg, nazywa się *płaszczyzną ściśle styczną*. Skręcenie mierzy to, jak bardzo (i w którą stronę) krzywa w otoczeniu badanego punktu odchyła się od tej płaszczyzny (gdy krzywa jest płaska, to skręcenie jest zerowe). Przywołane twierdzenie głosi, że

krzywa jest jednoznacznie (z dokładnością do położenia) wyznaczona przez swoje krzywizny i skręcenia.

Niby nic nadzwyczajnego, ale z tego już wynika np., że istnieją tylko trzy rodzaje krzywych ślizgających się po sobie. Istotnie, aby krzywa mogła się po sobie ślizgać, musi w każdym punkcie być taka sama, czyli musi mieć stałą krzywiznę i stałe skręcenie. Mamy więc trzy przypadki. Stałą krzywiznę 0 ma prosta (i zgodnie z twierdzeniem F–S nie ma innych takich krzywych). Stałą krzywiznę niezerową i zerowe skręcenie ma okrąg (i, wedle F–S, tylko on). Wreszcie stałą niezerową krzywiznę i stałe niezerowe skręcenie ma linia śrubowa (i, znów F–S, tylko ona). Znamy z codziennego życia suwaki, pokrętła i śruby (tu ślizganie zapewnia możliwość użycia nakrętki) – twierdzenie F–S zapewnia, że innych takich urządzeń być nie może.

Takie ładne twierdzenie spowodowało poszukiwania jego odpowiednika dla powierzchni. I tutaj spotkał matematyków zawód – można na siłę wyprodukować podobne twierdzenie, ale parametrów będzie aż 6 i będą one miały dość nieintuicyjny sens, a ponadto będą musiały spełniać już całkiem nieintuicyjne warunki (wzory Codazzi–Mainardi).

Jean F. Frénet (1816–1900),
Joseph A. Serret (1819–1885).

Delfino Codazzi (1824–1873),
Gaspere Mainardi (1800–1879).

F. Carl Gauss (1777–1855)

Tę samą geometrię wewnętrzną mogą mieć całkiem niepodobnie wyglądające powierzchnie. Pierwszym takim przykładem są *helikoida* i *katenoidea*. Ta pierwsza to powierzchnia, jaką zakreśla prosta jednostajnie obracająca się wokół prostej do niej prostopadłej i równocześnie jednostajnie przesuwająca się równoległe do niej. Tę drugą tworzą mydliny rozpięte na dwóch pierścieniach, leżących w płaszczyznach prostopadłych do prostej łączącej ich środki.

Karol Borsuk (1905–1982)

Badanie powierzchni w inną stronę skierował Gauss. Wskazał, jak ważne może być spostrzeżenie, że figury narysowane na płaskiej kartce papieru mają te same miarowe własności, gdy kartkę np. zwiniemy w rurkę: istotnie, nie zmieni się długość narysowanych linii, kąty między nimi, ani pola ograniczonych przez nie obszarów. Często opowiada się o tym, używając żyjących na kartce płaszczaków: żadne dokonywane przez nie pomiary nie pozwoliłyby im stwierdzić, jak w przestrzeni położona jest kartka, na której żyją. Możliwa do uprawiania przez nie geometria to *geometria wewnętrzna*.

Okazuje się, że owa nieświadomość dotyczy również nas. Zgodnie z ogólną teorią względności fizyka to właśnie geometria wewnętrzna przestrzeni, w której żyjemy. Na ogół przyjmujemy, że żyjemy w trójwymiarowej geometrii euklidesowej. W 1981 roku Borsuk udowodnił, że przestrzeń euklidesową n -wymiarową można, bez naruszenia jej geometrii wewnętrznej, zwinąć tak, by mieściła się w dowolnie małej kulce w euklidesowej przestrzeni $(n + 1)$ -wymiarowej. Nie mamy więc możliwości żadnym fizycznym pomiarem przekonać się, jak nasz Wszechświat wygląda w czterowymiarowej przestrzeni.

Oczywiście, krzywizna krzywych narysowanych na kartce zmienia się przy jej wyginaniu. Okazuje się jednak, że nie całkiem dowolnie.

Aby się o tym przekonać, przyjrzyjmy się krzywemu leżącemu na gładkiej powierzchni. Przypomniałem tu jeszcze raz gładkość, by zwrócić uwagę, że taka powierzchnia ma w każdym punkcie (jednoznacznie wyznaczoną) płaszczyznę styczną. Wektor prostopadły do niej to *wektor normalny* powierzchni w tym punkcie. Przecięcia powierzchni płaszczyznami zawierającymi ten wektor nazywają się *krzywymi normalnymi* w tym punkcie. Ich krzywizny wzięte ze znakiem plus, gdy krzywe zakręcają w kierunku wskazanym przez obrany wektor normalny, i ze znakiem minus, gdy zakręcają w przeciwną stronę, to *krzywizny normalne*. Euler udowodnił, iż gładkość powierzchni powoduje, że

Leonard Euler (1707–1783)

jeśli nie wszystkie krzywizny normalne są równe, to istnieją tylko dwa ich ekstrema, co więcej, krzywizny najmniejsza i największa przyjmowane są w kierunkach prostopadłych.

Krzywizny ekstremalne nazywamy *głównymi*, podobnie jak kierunki, w których są przyjmowane. Obejrzyjmy kilka przykładów.

W dowolnym punkcie powierzchni sfery wszystkie krzywizny normalne są równe, kierunki główne nie są wyznaczone, co oznacza, że można je sobie wybrać dowolnie, byle prostopadle. W dowolnym punkcie powierzchni walca jedno ekstremum to 0 i kierunek główny to kierunek tworzącej, drugie ekstremum to odwrotność promienia podstawy walca. Na siodle do konnej jazdy, w miejscu, gdzie siedzi jeździec, jeden kierunek główny wyznacza linia łącząca łęki, drugi – linia łącząca klapy. Widać, że krzywizny główne są przeciwnego znaku. Ostatnie dwa przykłady wskazują, dlaczego nie mówi się o krzywiznie maksymalnej i minimalnej: to, które ekstremum jest które, zależy od tego, po której stronie płaszczyzny stycznej obraliśmy wektor normalny.

Wydaje się, że łatwo jest podać przykład przeczący twierdzeniu Eulera – tzw. małpie siodło: trzy łęki i między nimi trzy klapy (dwie na nogi, trzecia na ogon, stąd nazwa). Bliższe zbadanie pokazuje jednak, że jest to złudne: każde gładkie małpie siodło ma na środku punkt, w którym wszystkie krzywizny normalne są równe 0, czyli lokalnie taki, jak punkt na płaszczyźnie.

Euler poszedł dalej – okazuje się, że znając krzywizny główne κ_1 i κ_2 oraz kąt α , jaki jakiś kierunek na płaszczyźnie stycznej tworzy z kierunkiem głównym odpowiadającym pierwszej z nich, można obliczyć krzywiznę normalną κ_N w tym kierunku. Mianowicie

$$\kappa_N = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha.$$

Jean B.M.Ch. de la Place Meusnier
(1754–1793)

Istotny dalszy krok zrobił na tej drodze Meusnier, dowodząc, że można podobnie znaleźć krzywiznę κ (prawie) każdej, już niekoniecznie normalnej, krzywej k – wystarczy znać kąt φ , jaki tworzy jej płaszczyzna ściśle styczna z płaszczyzną styczną do powierzchni:

$$\kappa \sin \varphi = \kappa_N,$$

gdzie krzywiznę normalną należy obliczyć ze wzoru Eulera dla kierunku wektora stycznego do krzywej k . Słowo „prawie” napisałem dlatego, że metoda ta zawodzi, gdy $\varphi = 0$, a więc np. dla krzywej, wzdłuż której nadmuchana dętka rowerowa (czyli torus) styka się z płaszczyzną, na której ją położymy.

Tak wielka rola, jaką w geometrii krzywych na powierzchni odgrywają krzywizny główne, kazała przyjrzeć się im bliżej, w szczególności zbadać znaczenie ich prostych kombinacji. I tak średnią arytmetyczną krzywizn głównych nazywa się *krzywizną średnią*. Tenże Meusnier odkrył, że

powierzchnie, których krzywizna średnia jest równa zero, to powierzchnie minimalne.

Joseph L. Lagrange (1736–1813)

Pojęcie *powierzchni minimalnych* wprowadził Lagrange. Charakteryzuje je następująca własność: dla dowolnej krzywej zamkniętej leżącej na tej powierzchni błona o minimalnym polu rozpięta na tym konturze to właśnie ta powierzchnia. Użycie słowa „błona” w poprzednim zdaniu wskazuje, że powierzchnie minimalne można poznawać, rozpinając na rozmaitych konturach błony mydlane – minimalność zapewnia napięcie powierzchniowe. Tych twierdzeń w jakimś sensie spodziewano się.

Z uwagi o błonach mydlanych bezpośrednio wynika, że katenoida jest powierzchnią minimalną. Okazuje się, że helikoida również. Są to bardzo szczególne powierzchnie minimalne: katenoida jest jedyną obrotową powierzchnią minimalną, a helikoida – jedyną prostokreślną.

Natomiast odkrycie, że iloczyn krzywizn głównych (proszę zauważyć, że jego wartość nie zależy od wyboru wektora normalnego!) ma sens geometryczny, było sensacyjne. Nawet bardzo powściągliwy Gauss nazwał ten rezultat *theorema egregium*, co oznacza *twierdzenie wspaniałe*. Głosi ono, że

iloczyn krzywizn głównych należy do geometrii wewnętrznej, czyli nie zmienia się przy wyginaniu (bez rozciągania!) powierzchni.

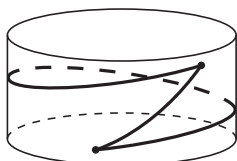
Iloczyn krzywizn głównych jest od tej chwili nazywany *krzywizną Gaussa* i oznaczany literą K .

Jedną z licznych praktycznych konsekwencji *theorema egregium* jest wskazanie, skąd się bierze i ile wynosi wytrzymałość rury. Rura, jako powstała ze zwinięcia (fragmentu) płaszczyzny, musi mieć taką samą krzywiznę Gaussa jak płaszczyzna. Krzywizna Gaussa płaszczyzny jest równa zero, bo takie są jej wszystkie krzywizny normalne. Wobec tego jedna z ekstremalnych krzywizn rury musi być równa zero, z czego wynika, iż tworząca rury-walca nie może się wygiąć – chyba że nie będą spełnione założenia *theorema egregium*, a więc materiał, z którego wykonana jest rura, rozciągnie się. Mamy więc wniosek:

wytrzymałość rury jest równa wytrzymałości na rozciąganie materiału, z którego jest wykonana.

Aby wyciągnąć dalej idące wnioski, trzeba przywołać nowe pojęcie – *krzywe geodezyjne*. Każdy, kto jeździł drogami w falistym terenie (np. na Białostocczyźnie), wie, że tzw. prosta droga w pagórkowatym terenie jest drogą bardzo falistą. Niemniej prostszej drogi wytyczyć się nie da. Taka właśnie „prosta” wytyczona przez geodetów dała swą nazwę geodezyjnym. Geodezyjne są to więc krzywe na powierzchni najprostsze – wobec tego w każdym punkcie ich krzywizna jest równa krzywiznie normalnej w tym punkcie. Są to równocześnie krzywe lokalnie najkrótsze, a więc takie, w których otoczeniu linii krótszych znaleźć się nie da (patrz rysunek). Wreszcie są to linie frontalne: dwukołowy wózek popychany swobodnie po powierzchni poruszałby się właśnie po takiej linii.

Miałem okazję przekonać się praktycznie, jak działa to spostrzeżenie. W 1975 roku redakcja *Delty* ogłosiła konkurs na budowę mostu z papieru (z bloku technicznego); ograniczenia klejenia były bardzo ostre. Największy ciężar, 57,490 kg, unióś most, w którym elementy nośne były rurkami trzymanymi nad parą i w zwinięciu osuszonymi, niesklejonymi w żaden sposób. Zresztą zawiodły w końcu nie one, a sposób ich połączenia.



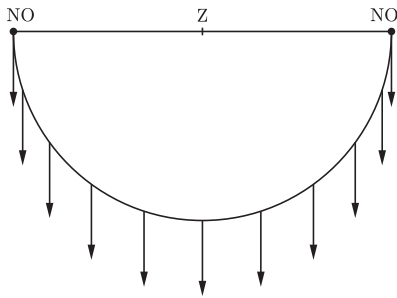
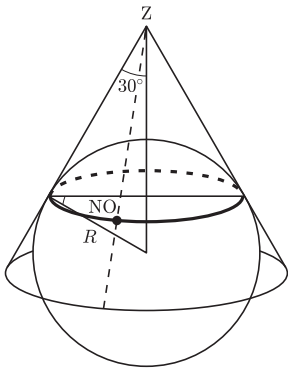
Na walcu geodezyjnymi są wszystkie linie śrubowe łączące dane punkty (oraz czasami okręgi lub proste).

Geodezyjne mają w każdym punkcie tylko krzywiznę normalną, ale inne krzywe mają nadwyżkę krzywizny, zwaną *krzywizną geodezyjną* – jak ją określić?

Zagadnienie zostało rozwiązane przez Levi-Civitę. Sposób, jaki zaproponował, to wprowadzenie przesunięcia równoległego po powierzchni. Chodzi o określenie takiego sposobu zmiany wektora leżącego w płaszczyźnie równoległej do powierzchni, który dobrze naśladowałby przesunięcie równoległe na płaszczyźnie. Okazało się, że dogodnie jest mówić o *przesunięciu równoległym wzdłuż krzywej*. Sposób ten jest taki: odrobinę przesuwamy równoległe wektor, a jeśli przestaje on leżeć w płaszczyźnie stycznej do powierzchni, doginamy go do niej. Jeśli zaczniemy od wektora stycznego do krzywej, to może się on potem okazać wcale do niej niestyczny, może odchylić się od wektora stycznego o jakiś kąt. Tempo zmian tego kąta to właśnie *krzywizna geodezyjna*. Levi-Civita wykazał, że

przesunięcie równoległe po powierzchni wzdłuż krzywej i krzywizna geodezyjna są pojęciami geometrii wewnętrznej.

Określenia te wydają się mętne, ale okażą się możliwe do przyjęcia, gdy omówimy je na przykładach. Weźmy pod uwagę kulę ziemską i przesuwajmy wektor równoległe po równiku. Łatwo zauważyć, że dogięcie do płaszczyzny stycznej przesuniętego równoległe wzdłuż równika wektora stycznego to znów będzie wektor styczny. Zatem zmiana kąta będzie zerowa i zerowe będzie tempo zmian – krzywizna geodezyjna równika jest równa 0. Nic dziwnego: równik jest geodezyjną i ma tylko krzywiznę normalną. Podobny wynik otrzymamy, przesuwając równoległe wektor styczny po południku.



Spróbujmy teraz przesunąć wektor styczny po innym równoleżniku niż równik. Dla zwrócenia uwagi zaczniemy w Nowym Orleanie (30° szerokości północnej). Jak ustalić, jak zmieniać się będzie kierunek wektora przesuwanego wzdłuż 30-ego równoleżnika? Sprytny sposób polega na tym, by opisać na kuli ziemskiej wzdłuż tego równoleżnika stożek. To, że jest to sprytnie, polega na tym, że kula ziemską i tak opisany na niej stożek mają na 30-tym równoleżniku te same płaszczyzny styczne. Zatem przesuwanie po 30-tym równoleżniku można równie dobrze traktować jak przesuwanie po kuli ziemskiej, jak też i po stożku. Ale w tym drugim przypadku możemy skorzystać z twierdzenia Levi-Civity i rozwinąć stożek. Stożek ten, jak widać na rysunku, ma kąt między tworzącą a osią równy 30°. Zatem (do czego każdy bez trudu dojdzie) po rozcięciu i rozwinięciu będzie płaskim półkolem. Tyle że na płaszczyźnie przesunięcie w sensie Levi-Civity to zwykle przesunięcie. Każdy teraz widzi, po zwinięciu stożka z powrotem, że wektor przesuwany równoległe wzdłuż 30-tego równoleżnika na stożku, a więc i na kuli, zmieni swój kierunek o 180° – napiszmy lepiej w mierze łukowej: o π . Równoleżnik (jak to okrąg) jest w każdym punkcie taki sam, więc zmiana kierunku jest jednostajna – aby znaleźć jej tempo, należy podzielić całą zmianę przez długość drogi, na jakiej się dokonała. Uzyskaliśmy zatem następujące obliczenie krzywizny geodezyjnej 30-tego równoleżnika na sferze o promieniu R :

$$\kappa_G = \frac{\pi}{2\pi R \cos 30^\circ} = \frac{\pi}{2\pi \cdot R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{R\sqrt{3}}.$$

Obliczmy jeszcze w Nowym Orleanie krzywiznę normalną i krzywiznę 30-tego równoleżnika, ale to łatwo, bo są to krzywizny okręgowo:

$$\kappa_N = \frac{1}{R}, \quad \kappa = \frac{1}{R \cos 30^\circ} = \frac{2}{R\sqrt{3}}.$$

Zauważmy, że jest tutaj

$$\left(\frac{2}{R\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{R\sqrt{3}}\right)^2,$$

co można zapisać jako

$$\kappa^2 = \kappa_N^2 + \kappa_G^2.$$

Ciekawe, że równość ta jest spełniona dla każdej gładkiej krzywej na każdej gładkiej powierzchni. Krzywizna krzywej, krzywizna normalna i krzywizna geodezyjna spełniają swoiste „twierdzenie Pitagorasa”.

Możemy teraz powrócić do Gaussa. Badając własności krzywizny zwanej dziś jego nazwiskiem, stwierdził, że na powierzchni o stałej krzywiznie K pole $|T|$ trójkąta T , którego boki są łukami geodezyjnych, spełnia równość

$$K \cdot |T| = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

gdzie α , β i γ są kątami tego trójkąta. To niezły wzór, bo z niego wynika natychmiast, że pole trójkąta na sferze o promieniu R jest równe

$$R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

bo przecież krzywizna Gaussa sfery jest równa $\frac{1}{R^2}$, jako że jej wszystkie krzywizny normalne są równe $\frac{1}{R}$. Widać też, że suma kątów trójkąta geodezyjnego na dowolnej powierzchni o ujemnej krzywiznie Gaussa (w szczególności na wszystkich powierzchniach minimalnych) jest mniejsza od π .

Pierre Bonnet (1819–1892)

Ale znacznie ciekawsze jest, dokonane przez Bonneta, uogólnienie tego wyniku na dowolne (niekoniecznie geodezyjne) wielokąty. Jeśli przez Δ_Z oznaczymy sumę kątów zewnętrznych leżącego na powierzchni wielokąta W , a przez Δ_G oznaczymy sumę zmian kąta wektora stycznego przesuwanego po każdym z boków wielokąta W , to na powierzchni o stałej krzywiznie K będzie

$$K \cdot |W| = 2\pi - \Delta_Z - \Delta_G.$$

Przykładem wykorzystania tego wzoru może być spostrzeżenie, że suma kątów zewnętrznych zwykłego płaskiego wielokąta jest zawsze równa 2π (czyli 360° – kąty trzeba liczyć z orientacją). Można za pomocą tego wzoru obliczyć pole czaszy odciętej na powierzchni Ziemi przez używany już 30-ty równoleżnik: jest ona odcięta jedną gładką krzywą, więc kątów zewnętrznych nie ma; zmianę kąta przy przesunięciu wzdłuż równoleżnika już obliczaliśmy (wyszło π), mamy więc $K \cdot |czasza| = 2\pi - 0 - \pi = \pi$, a ponieważ $K = \frac{1}{R^2}$, więc $|czasza| = \pi R^2$, czyli jest to $\frac{1}{4}$ powierzchni całej sfery. Itp.

Istnieje jeszcze bardziej ogólna wersja wzoru Gaussa–Bonnetta, nie zakładająca stałej krzywizny. Ale tu zajmiemy się czymś innym – wykorzystaniem tego wzoru do badania powierzchni zwartych, czyli ograniczonych, zamkniętych, bez brzegu (jak sfera czy torus). Można wtedy pokusić się o obliczenie, ile też wyniesie iloczyn krzywizny przez pole całej powierzchni. Dzielimy w tym celu powierzchnię na wielokąty i sumujemy wyniki uzyskane dla nich. Wtedy okazuje się, że wszystkie brzydkie wyrazy znikają i otrzymuje się prosty wynik:

$$K \cdot |P| = 2\pi \cdot \chi(P),$$

gdzie $\chi(P)$, liczba zwana charakterystyką Eulera–Poincarégo, jest równa sumie liczby wielokątów, na jakie podzieliłoby powierzchnię P , i liczby wierzchołków, jakie przy tym podziale powstały, minus liczba użytych boków. Liczba ta nie zależy od tego, jak dokonujemy podziału, co jest niebagatelnym rezultatem Poincarégo.

Henri Poincaré (1854–1912)

Korzyść z tego wzoru może być taka, że dowiadujemy się, jak można określić sposób pomiaru długości na danej powierzchni zwartej, aby przy tym sposobie miała ona stałą krzywiznę, oraz jaka to wtedy będzie krzywizna. Dla sfery charakterystyka E–P jest równa 2. Mamy więc po obu stronach równości 4π , co nie jest dziwne – zwykły sposób mierzenia odległości daje takie rezultaty. Jednak dla torusa dostajemy 0 (proszę sprawdzić, dzieląc torus na wielokąty w jakiś prosty sposób). Wynika z tego, że aby na torusie była geometria o stałej krzywiznie, trzeba tak mierzyć odległość, by mieszkające na nim płaszczaki czuły się tak, jak na walcu czy na płaszczyźnie.

* * *

Na Festiwalu jednak się nie skończyło. Na zamówienie Doroty Kolany opowiedziałem to jej podopiecznym (młodym ludziom na przelomie gimnazjum i liceum) w Pałacu Młodzieży w Katowicach. I teraz proszę o opinię, czy prowadząc te dwa wykłady, bardzo zgrzeszyłem. I ogólniej: czy robienie takich przeglądów „na przełaj przez...” (po niemiecku moje wykłady nazwano brutalniej „Streifzüge durch...”) to rzecz pożyteczna czy raczej szkodliwa?