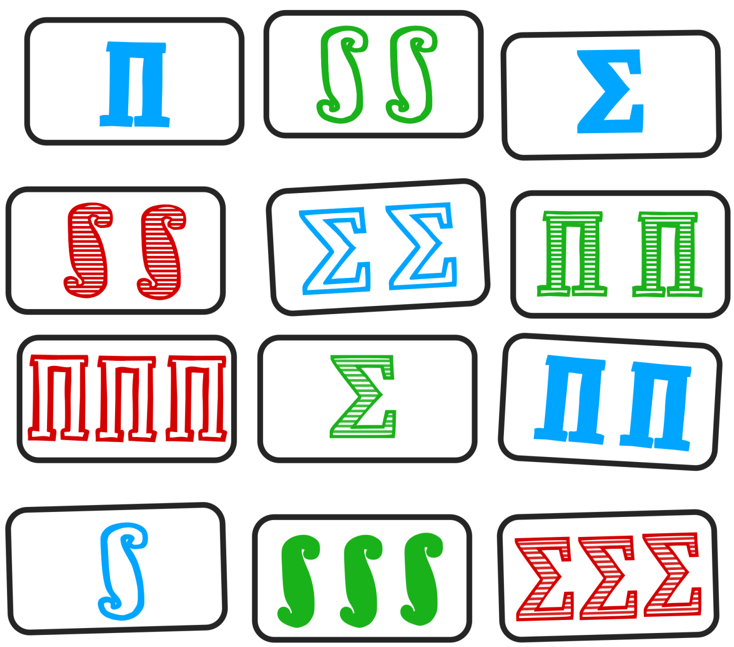
# 66. Szkoła Matematyki Poglądowej
# Podobieństwa i różnice

Ośrodek Kultury Matematycznej

OKM

25-28 sierpnia 2023, Siedlce



Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny w Siedlcach

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Podobieństwa i różnice pojawiają się w matematycznej edukacji bardzo wcześnie. Różnica, jako pojęcie z zakresu arytmetyki liczb naturalnych jest omawiana już w pierwszej klasie szkoły podstawowej, a niewiele później, wraz z podstawami geometrii pojawia się pojęcie podobieństwa różnych figur. Jakkolwiek nie będziemy uciekać od tych podstawowych definicji podczas najbliższej Szkoły Matematyki Poglądowej, zamierzamy raczej się przyjrzeć się ogólniejszej i może też ciut potoczniejszej interpretacji tych pojęć.

W końcu poważna część matematyki wyższej opiera się na klasyfikacjach różnych klas obiektów: w algebrze zastanawiamy się nad izomorficznością grup czy ciał, w topologii nad homeomorficznością przestrzeni, w geometrii różniczkowej nad dyfeomorficznością rozmaitości – tak możnaby wymieniać bez końca. Takie klasyfikacje prowadzą do jednych z najbardziej fascynujących zagadnień matematycznych, a tak naprawdę sprowadzają się do określenia, czy dane obiekty te są według nas wystarczająco podobne. Zresztą wszystkie te pojęcia „podobieństwa" są stopniowalne: na przykład, w topologii badamy nie tylko homeomorficzność, ale też słabsze pojęcia homotopijnej równoważności lub kobordyzmu, w geometrii algebranicznej – słabsze od izomorfizmu pojęcie biwymiernej równoważności.

A jeśli chcemy pokazać, że pewne obiekty się różnią? Posiadamy mnóstwo sposobów określania tych różnic – chociażby całe teorie niezmienników: wyznaczniki, ślady, miary, grupy homologii i kohomologii, K-teoria, niezmienniki węzłów itp. . Ale co zrobić, gdy kolejne niezmienniki uparcie wychodzą takie same?

I wreszcie podobieństwa i różnice przydają się w matematyce na poziomie metanaukowym. Szukając nowych, interesujących zagadnień, rozwiązując otwarte problemy, często pozwalamy naszej intuicji na oparcie się na podobieństwach i różnicach pomiędzy obiektami, o których staramy się uzyskać informacje, a tym, co już wiemy.

# 66. Szkoła Matematyki Poglądowej

## Podobieństwa i różnice

25-28 sierpnia 2023, `www.smp.uph.edu.pl`

| | piątek, 25 sierpnia<br>prowadzący: TBA |
|---|---|
| 8:50–9:00 | otwarcie Szkoły |
| 9:00–9:45 | Adam Gregosiewicz<br>*Wykład Laureata Medalu kAbela 65 SMP: TBA* |
| 10:00–10:45 | Bartłomiej Pawlik<br>*Problemy pętli* |
| 10:45–11:15 | przerwa |
| 11:15–12:00 | Oskar Skibski<br>*TBA* |
| 12:15–13:00 | Małgorzata Śleszyńska-Nowak<br>*O uczciwych złodziejach naszyjników* |
| 13:00–16:00 | przerwa |
| 16:15–17:00 | Paweł Naroski<br>*TBA* |
| 17:15–18:00 | Tomasz Bartnicki<br>*TBA* |
| 18:00–19:30 | przerwa |
| 19:30–20:30 | Renata Jurasińska<br>*Zagadki* |

| | sobota, 26 sierpnia<br>prowadzący: TBA |
|---|---|
| 9:00–9:45 | Zofia Miechowicz<br>*Zakopane i nie na pokaz* |
| 10:00–10:45 | Anna Gierzkiewicz-Pieniążek<br>*Pomiędzy orbitami okresowymi* |
| 10:45–11:15 | przerwa |
| 11:15–12:00 | Zdzisław Pogoda<br>*O zaskakujących różnicach i dziwnych podobieństwach, czyli scenki o problemach klasyfikacji* |
| 12:15–13:00 | Bartłomiej Bzdęga<br>*Podobieństwo figur na płaszczyźnie* |
| 13:00–16:00 | przerwa |
| 16:15–17:00 | Joanna Jaszuńska<br>*Podobieństwa? Im mniej, tym lepiej!* |
| 17:15–18:00 | Marek Kordos<br>*Kwadratura kontra kubatura* |
| 18:00–19:30 | przerwa |
| 19:30–22:00 | *uroczysta kolacja* |

| | niedziela, 27 sierpnia<br>prowadzący: TBA |
|---|---|
| 9:30–11:00 | Małgorzata Mikołajczyk<br>*Gra terenowa* |
| 11:15–12:00 | Adam Bobrowski<br>*TBA* |
| 12:15–13:00 | TBA<br>*TBA* |
| 13:00–15:45 | przerwa |
| 16:15–17:00 | TBA<br>*TBA* |
| 17:15–18:00 | TBA<br>*TBA* |

| | poniedziałek, 28 sierpnia<br>prowadzący: TBA |
|---|---|
| 9:00–9:45 | Maciej Borodzik<br>*Wielomian Jonesa a wielomian Aleksandera* |
| 10:00–10:45 | Rafał Meller<br>*TBA* |
| 10:45–11:15 | przerwa |
| 11:15–12:00 | Masha Vlasenko<br>*TBA* |
| 12:15–13:00 | Bartosz Naskręcki<br>*TBA* |
| 13:00–13:15 | Małgorzata Misztal<br>*Konkurs na Wzorowego Słuchacza* |
| 13:15–13:30 | przerwa i głosowanie na laureata Medalu Filca |
| 13:30–14:00 | *zakończenie Szkoły* |

## Problemy pętli

Bartłomiej Pawlik

W referacie będziemy się przyglądać pewnym zagadnieniom związanym z zachowaniem wybranych rodzin rekurencyjnych ciągów liczb całkowitych. Oględnie rzecz ujmując, problem pętli polega na określaniu, czy dane typy ciągów od pewnego miejsca zachowują się *podobnie*, czy może jednak wykazują pewne *różnice*. W wielu miejscach otrzemy się o matematykę rekreacyjną (stała Kaprekara, ciągi *pea pattern* i inne zabawy słowne), a w kilku o poważniejszą (problem Collatza).

Pod koniec referatu postaram się uzasadnić, iż to, że mam selfie z Évaristem Galois jest bardziej prawdopodobne niż to, że 26 sierpnia 2023 roku trafię szóstkę w Lotto.

---

## O uczciwych złodziejach naszyjników

Małgorzata Śleszyńska-Nowak

Dwóch złodziei ukradło naszyjnik składający się z diamentów i szmaragdów. Zamierzają sprawiedliwie podzielić się łupem, czyli pociąć naszyjnik na kilka części. Złodzieje nie są estetami, nie zależy im na tym, żeby naszyjniki były podobne pod względem rozmieszczenia kamieni. Chcą tylko aby obaj dostali taką samą liczbę diamentów i szmaragdów. Mają jeszcze jedno założenie – planują przeciąć naszyjnik w jak najmniejszej liczbie miejsc (kamienie połączone są złotym łańcuszkiem, którego nie chcą zbytnio poniszczyć). Ile cięć muszą zrobić złodzieje? A gdyby w naszyjniku były nie tylko diamenty i szmaragdy, ale też rubiny? Albo gdyby szajka składała się z większej liczby złodziei? Ile wtedy cięć byłoby potrzebnych?

---

## Zakopane i nie na pokaz

Zofia Miechowicz

O tym jak zupełnie niewinne zabawy słowne mogą przerodzić się w całkiem poważne rozważania matematyczne, czyli o palindromach w różnych matematycznych ujęciach.

---

## Pomiędzy orbitami okresowymi

Anna Gierzkiewicz-Pieniążek

Porządek Szarkowskiego „$\triangleleft$” na liczbach naturalnych:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft \cdots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \cdots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \cdots \triangleleft 2^k \triangleleft 2^{k-1} \triangleleft \cdots \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$$

pojawia się, gdy badamy punkty okresowe ciągłego odwzorowania odcinka w siebie. Twierdzenie Szarkowskiego mówi, że jeśli takie odwzorowanie ma punkt o okresie $m$, to ma również punkty okresowe o wszystkich okresach $n$, które są „większe” według tego porządku: $m \triangleleft n$. W szczególności, pomiędzy punktami orbity o okresie 3 na odcinku znajdziemy punkty o wszystkich okresach naturalnych!

Niestety, to piękne twierdzenie nie daje się uogólnić na wyższe wymiary. Chyba, że… odwzorowanie jest wystarczająco podobne do jednowymiarowego. Dzięki temu znajdziemy całe mnóstwo okresowych rozwiązań równań różniczkowych, które wydają się na oko niezbyt chaotyczne.

---

## O zaskakujących różnicach i dziwnych podobieństwach, czyli scenki o problemach klasyfikacji

Zdzisław Pogoda

Ważną rolę w matematyce odgrywają problemy klasyfikacji rozmaitych obiektów (krzywych, grup, rozmaitości). Matematycy stosują przeróżne wymyślne techniki i, jeśli sprawdzają się w jednym przypadku, to próbują je wykorzystać również w innych sytuacjach, czasem to się udaje, a czasem nie. Kiedy? Może uda się o tym opowiedzieć.

---

## Podobieństwo figur na płaszczyźnie

Bartłomiej Bzdęga

Podobieństwem nazywamy również przekształcenie płaszczyzny (niestety!), które zachowuje proporcje. Każde podobieństwo niebędące izometrią jest albo podobieństwem spiralnym, albo symetrią dylatacyjną. Pokażę związek tych przekształceń z liczbami zespolonymi oraz konfiguracje geometryczne, w których te dwa ostatnie pojawiają się w naturalny sposób.

---

## Podobieństwa? Im mniej, tym lepiej!

Joanna Jaszuńska

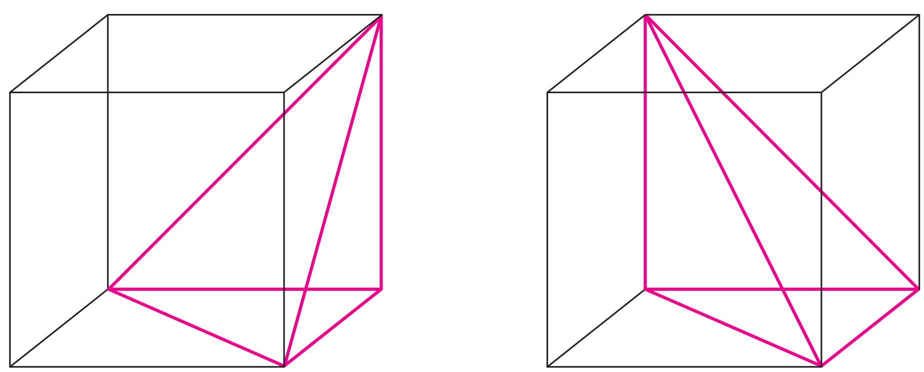
Opowiem o tym, dlaczego i w jakim sensie podobieństw jest bardzo niewiele. Pokażę także, jakie płyną z tego korzyści i w jakich okolicznościach ten mały wybór może bardziej cieszyć niż martwić.

---

## Kwadratura kontra kubatura

Marek Kordos

Mierzenie pola czy objętości wielokąta czy wielościanu (czyli ich miary Jordana) to identyczne procedury: umieszczamy obiekt na jednostkowej siatce kwadratowej czy sześciennej, którą następnie wielokrotnie ($i$) zagęszczamy, zliczając ($k_i$) zawarte w nim oczka – ciąg odpowiednio $\frac{k_i}{4^{i-1}}$ czy $\frac{k_i}{8^{i-1}}$ okazuje się zbieżny i jego granica to odpowiednio pole czy objętość. Euklides nie znał miary Jordana i mierzył inaczej: rozkładał każdy wielokąt na trójkąty, a wielościan na czworościany i w przypadku trójkątów dzielił je na kawałki, z których składał kwadraty, a w przypadku czworościanów posługiwał się metodą wyczerpywania, a więc używał granicy. Postępował zatem niejednakowo. Problem pozbycia się granicy w przypadku wielościanów był najdłużej bezskutecznie atakowanym problemem matematyki. Hilbert uważał, że brak odpowiedzi na to, czy możliwe jest obliczanie miary wielościanów bez przejścia granicznego, jest krępujący i umieścił to pytanie jako swój III problem (tuż za hipotezą continuum i niesprzecznością arytmetyki). Rozwiązanie jest negatywne i zaowocowało czymś tak zgoła nieoczywistym, jak baza Hamela. Dowód tej niemożności wzbogacony będzie demonstracją, że z tych czworościanów tylko jeden da się elementarnie (*tangramowo*) przekształcić na sześcian.



---

## Wielomian Jonesa a wielomian Aleksandera

Maciej Borodzik

Wielomiany Jonesa i Aleksandera są dwoma najważniejszymi niezmiennikami węzłów. Istnieją bardzo podobne definicje. Na wykładzie pokażę zaskakujące podobieństwa i zaskakujące różnice między tymi niezmiennikami.

---